Список использованной литературы

1. **Митрофанов С. П.** Групповая технология машиностроительного производства: в 2-х т. Л.: Машиностроение; Ленингр. отд-ние, 1983. 407 с.
2. **Пиль Э. А.** Оптимальная инструментальная наладка для станков с ЧПУ // Станки и инструмент. 1990. № 4.
3. **Пиль Э. А.** Технологическое обеспечение САПР ТП и УП на корпусные детали: монография. СПб.: ИТМО, 1993. 195 с.
4. **Пиль Э. А.** Теория сложности обработки корпусных деталей и её применение в машино- и приборостроении. СПб.: PEME&Co., 2003. 211 с.

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗА ПОВЕРХНОСТЬЮ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА

Прохоров Е. С.
Новосибирский государственный педагогический университет

В газовой динамике под сильным разрывом понимают двумерную поверхность в пространстве, на которой функции плотности ρ, массовой скорости u, давления p и других параметров сплошной среды имеют разрыв первого рода. Величины разрывов (или, как говорят, скачков) этих функций не могут быть произвольными, а удовлетворяют некоторым соотношениям – уравнениям сильного разрыва [Ландау, Лифшиц 1986]. Так для сильного разрыва типа «ударная волна» эти уравнения могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{gathered}\rho_*\left(D-u_*\right)=\rho_0\left(D-u_0\right)\\ p_*+\rho_*\left(D-u_*\right)^2=p_0+\rho_0\left(D-u_0\right)^2\\ U_*+p_*/\rho_*+\left(D-u_*\right)^2/2=U_0+p_0/\rho_0+\left(D-u_0\right)^2/2\end{gathered}\qquad(1)$$

Они выражают законы сохранения массы, импульса и энергии на ударном фронте (поверхности разрыва). Здесь D – скорость фронта, U – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия среды; индексами «0» и «*» обозначаются значения газодинамических величин перед фронтом (в исходном состоянии) и непосредственно за фронтом волны соответственно. Отметим, что с учетом теплового эффекта за счет химических реакций эти законы сохранения применимы и для детонационного фронта (сильного разрыва с тепловыделением) [Митрофанов 2003].

Если движение среды за фронтом описывается гладким одномерным решением, тогда можно установить однозначное соответствие между частной пространственной производной (ЧПП) функции любого газодинамического параметра – $\left(\partial\mathbf{y}/\partial r\right)_*$, где $\mathbf{y}=\{\rho,u,p\}$, и производной по времени скорости (ускорением) фронта – dD/dt. Для одномерного адиабатического течения совершенного газа такие ЧПП за фронтом ударной волны приведены в [Седов 1963]. Однако область применимости этих соотношений в значительной мере ограничена условиями модели совершенного газа [Румер, Рывкин 1977], в рамках которой полагают, что газ является идеальным, химически инертным и имеет постоянный показатель адиабаты – $\gamma=\left(\partial\ln p/\partial\ln\rho\right)_S=const$, где S – энтропия вещества. Например, полученные ранее формулы для ЧПП не могут быть использованы для таких важных в практическом отношении случаев как: 1) движения газа за сильными ударными волнами, когда возможны возбуждение дополнительных степеней свободы и диссоциация молекул; 2) равновесные течения реагирующих газов за фронтом детонации, распространяющейся в химически активной среде.

В настоящей работе удалось снять эти ограничения путем использования естественного предположения к виду внутренней энергии U. Предположение основано на том, что с учетом термического уравнения состояния (например: уравнения Клапейрона - Менделеева или уравнения Ван-дер-Ваальса) полную внутреннюю энергию, включающую в себя кроме термодинамической части и потенциальную химическую энергию, можно представить в виде функции давления p и плотности ρ – $U=U(p,\rho)$. Это имеет место, как для инертных сред, так и для продуктов реакции в состоянии химического равновесия. При такой форме записи внутренней энергии, с учетом уравнения первого начала термодинамики, равновесная скорость звука c в среде определяется из соотношения

$$c^2=\left(\partial p/\partial\rho\right)_S=\left(p/\rho^2-U_\rho\right)\Big/U_p,\ U_\rho=\left(\partial U/\partial\rho\right)_p,\ U_p=\left(\partial U/\partial p\right)_\rho.\qquad(2)$$

Дифференцируя (1) по D, с учетом (2) получим систему алгебраических уравнений относительно производных $d\mathbf{y}_*/dD$, где $\mathbf{y}_*=\{\rho_*,u_*,p_*\}$:

$$\begin{bmatrix} D-u_* & -\rho_* & 0 \\ (D-u_*)^2 & -2\rho_*(D-u_*) & 1 \\ -\left(U_p\right)_* c_*^2 & -(D-u_*) & \left(U_p\right)_* + 1/\rho_* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d\rho_*/dD \\ du_*/dD \\ dp_*/dD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0-\rho_* \\ 0 \\ u_*-u_0 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему, находим:

$$\frac{d\rho_*}{dD} = \frac{\rho_*-\rho_0}{D-u_0}\cdot\frac{\rho_*}{\rho_0}\cdot A, \quad \frac{du_*}{dD} = \frac{u_*-u_0}{D-u_0}\cdot(A+1), \quad \frac{dp_*}{dD} = \frac{p_*-p_0}{D-u_0}\cdot(A+2),$$
$$A = \frac{2+(1/\rho_*-1/\rho_0)/(U_p)_*}{(1/M_*)^2-1}, \tag{3}$$

где $M_* = (D-u_*)/c_*$ – число Маха относительного потока за фронтом волны.

Далее для получения искомых ЧПП функций газодинамических параметров за фронтом волны (поверхностью сильного разрыва) воспользуемся методом, описанным в [Седов 1963]. Так для одномерных движений любой газодинамический параметр среды зависит только от одной пространственной координаты $r\ (r \geq 0)$ и времени t, т.е. $\mathbf{y} = \mathbf{y}(r,t)$. Если определять текущую координату фронта волны r_* в виде монотонно возрастающей функции от времени (волна распространяется от центра) – $r_* = r_*(t)$, тогда для фронтовых параметров $\mathbf{y}_* = \{\rho_*, u_*, p_*\}$ получаем следующие зависимости $\mathbf{y}_* = \mathbf{y}(r_*(t),t) = \mathbf{y}_*(t)$.

В соответствии с [Седов 1963] полные производные параметров $\mathbf{y}_*$ по времени связаны с первыми частными производными аналогичных параметров за фронтом по t – $(\partial\mathbf{y}/\partial t)_*$ и координате r – $(\partial\mathbf{y}/\partial r)_*$ следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{y}_*}{dt} = \frac{d\mathbf{y}_*}{dD}\cdot\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t}\right)_* + D\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial r}\right)_*. \tag{4}$$

Здесь учтено, что скорость фронта – $D = dr_*/dt$.

Одномерные уравнения нестационарной газовой динамики для адиабатических плоских движений ($N=0$), а также движений с осевой ($N=1$) и центральной ($N=2$) симметрией могут быть приведены к виду [Станюкович 1971]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} = -m \text{ , где } m = \frac{\rho u N}{r};$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\tau \text{ , где } \tau = 0; \tag{5}$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial r} + c^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) = -q \text{ , где } q = 0.$$

Поскольку эти уравнения справедливы и для течения газа, примыкающего к фронту волны, то исключая в (5) с помощью (4) частные производные $(\partial\mathbf{y}/\partial t)_*$, получим систему линейных уравнений относительно $(\partial\mathbf{y}/\partial r)_*$:

$$\begin{bmatrix} D-u_* & -\rho_* & 0 \\ 0 & D-u_* & -1/\rho_* \\ c_*^2(D-u_*) & 0 & D-u_* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\partial\rho/\partial r)_* \\ (\partial u/\partial r)_* \\ (\partial p/\partial r)_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\rho_*/dD\cdot dD/dt + m_* \\ du_*/dD\cdot dD/dt \\ (dp_*/dD - c_*^2\cdot d\rho_*/dD)\cdot dD/dt \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему с учетом (3), найдем искомые ЧПП функций газодинамических параметров за фронтом волны (поверхностью сильного разрыва):

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)_* = \frac{1}{M_*^2-1}\left\{\left[3(A+1) - A/M_*^2\right]\cdot\frac{\rho_*-\rho_0}{c_*^2}\cdot\frac{dD}{dt} + \frac{M_* m_*}{c_*}\right\},$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_* = \frac{1}{M_*^2-1}\left\{\frac{\rho_0}{\rho_*}\cdot(2A+3)\cdot\frac{u_*-u_0}{c_*^2}\cdot\frac{dD}{dt} + \frac{m_*}{\rho_*}\right\}, \tag{6}$$
$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_* = \frac{1}{M_*^2-1}\left\{\frac{\rho_0}{\rho_*}\cdot\left[A+2+(A+1)/M_*^2\right]\cdot\frac{p_*-p_0}{c_*^2}\cdot\frac{dD}{dt} + M_* c_* m_*\right\},$$

где $m_* = \rho_* u_* N / r_*$.

Полученные соотношения (6) могут быть обобщены и на другие виды движений среды. Так в случае рассмотрения квазиодномерных течений газа в трубе с переменной площадью поперечного сечения $\sigma = \sigma(r)$ достаточно заменить в выражении для m – правой части первого уравнения системы (5), а значит и в решении (6), отношение N / r на производную $d(\ln \sigma) / dr$.

Заметим, что в канальном приближении принципиально нетрудно учесть также потери на трение и теплоотвод в стенки трубы [Гинзбург 1958]. В этом случае правые части τ и q уравнений системы (5) уже не равны нулю, а являются некоторыми функциями, зависящими от параметров потока ρ_*, u_*, p_* и гидравлического диаметра трубы $d_* = 4\sigma_* / \chi_*$ (который для круглой трубы совпадает с обычным): $d_* = 4\sigma_* / \chi_*$, где $\sigma_* = \sigma(r_*)$, $\chi_* = \chi(r_*)$ – площадь и периметр поперечного сечения трубы в месте расположения фронта волны. Однако эти изменения не влияют на характерную структуру соотношений(6).

Как показывает анализ во всех рассмотренных эти соотношения представляют формулы типа $(\partial \mathbf{y} / \partial r)_* = \mathbf{g}_* \cdot dD / dt + \mathbf{h}_*$, которые устанавливают линейную связь между первыми ЧПП производными параметров за фронтом волны $(\partial \mathbf{y} / \partial r)_*$ и ускорением самого фронта dD / dt. Правые части m, τ, q уравнений системы (5) влияют только на свободные члены $\mathbf{h}_*$. В общем виде коэффициенты пропорциональности $\mathbf{g}_*$ легко получить из (6). Они обладают универсальностью и не зависят от внешних условий движения среды (от вида выражений для m, τ, q). При заданных начальных параметрах ρ_0, u_0, p_0, U_0 конкретные значения коэффициентов пропорциональности $\mathbf{g}_*$ определяются только видом функциональной зависимости для внутренней энергии и скоростью фронта D.

Для большинства практически важных случаев (для ударных и детонационных волн), когда справедливы следующие неравенства

$$p_* > p_0, \rho_* > \rho_0, u_* > u_0, M_* < 1,$$

можно показать, что коэффициенты пропорциональности, стоящие перед производной dD / dt отрицательны. Тогда из (6) следует, что для одномерных адиабатических движений при ускорении фронта волны ($dD / dt > 0$) плотность, давление и массовая скорость газа уменьшаются при приближении к фронту, т.е. $(\partial \mathbf{y} / \partial r)_* < 0$.

Итак, при естественном предположении к виду внутренней энергии среды получены более универсальные, по сравнению с ранее известными, ЧПП функций газодинамических параметров за поверхностью сильного разрыва (за фронтом ударных и детонационных волн), что позволяет расширить область их возможных применений в приложениях (например, при построении численных и аналитических приближенных решений газодинамических задач).

Список использованной литературы

1. **Гинзбург И. П.** Прикладная гидрогазодинамика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. 337 с.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. **Митрофанов В. В.** Детонация гомогенных и гетерогенных систем. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2003. 200 с.
4. **Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. 552 с.
5. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1963. 386 с.
6. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 804 с.

УЧЕТ НЕСЖИМАЕМОСТИ ДЛЯ ВОЛН В ЖИДКОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Пыркова О. А.
ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Волны, распространяющиеся в толще океана, можно разбить на две категории:

① акустические волны высокой частоты, которые возникают из-за небольшой сжимаемости морской воды, и

② волны с существенно меньшей частотой, к которым относятся внутренние, инерционные и планетарные волны, вызванные гравитационными и центробежными силами.

Распространение звуковых волн в океане описывается обычным линейным волновым уравнением с фазовой скоростью $c_s \cong 1{,}5 \cdot 10^3 \, м / с$. Акустические волны в океане обычно находятся в области частот от 1 Гц до 100кГц. Таким образом, периоды акустических волн лежат в диапазоне $T_s = 1 \div 10^{-5}$ $с$ с длиной волны