Пыркова О. А.
УЧЕТ НЕСЖИМАЕМОСТИ ДЛЯ ВОЛН В ЖИДКОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2009/6/46.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2009. № 6 (25). C. 146-149. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2009/6/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

где $m_* = \rho_* u_* N / r_*$.

Полученные соотношения (6) могут быть обобщены и на другие виды движений среды. Так в случае рассмотрения квазиодномерных течений газа в трубе с переменной площадью поперечного сечения $\sigma = \sigma(r)$ достаточно заменить в выражении для m – правой части первого уравнения системы (5), а значит и в решении (6), отношение N / r на производную $d(\ln \sigma) / dr$.

Заметим, что в канальном приближении принципиально нетрудно учесть также потери на трение и теплоотвод в стенки трубы [Гинзбург 1958]. В этом случае правые части τ и q уравнений системы (5) уже не равны нулю, а являются некоторыми функциями, зависящими от параметров потока ρ_*, u_*, p_* и гидравлического диаметра трубы $d_* = 4\sigma_* / \chi_*$ (который для круглой трубы совпадает с обычным): $d_* = 4\sigma_* / \chi_*$, где $\sigma_* = \sigma(r_*)$, $\chi_* = \chi(r_*)$ – площадь и периметр поперечного сечения трубы в месте расположения фронта волны. Однако эти изменения не влияют на характерную структуру соотношений(6).

Как показывает анализ во всех рассмотренных эти соотношения представляют формулы типа $(\partial \mathbf{y} / \partial r)_* = \mathbf{g}_* \cdot dD / dt + \mathbf{h}_*$, которые устанавливают линейную связь между первыми ЧПП производными параметров за фронтом волны $(\partial \mathbf{y} / \partial r)_*$ и ускорением самого фронта dD / dt. Правые части m, τ, q уравнений системы (5) влияют только на свободные члены $\mathbf{h}_*$. В общем виде коэффициенты пропорциональности $\mathbf{g}_*$ легко получить из (6). Они обладают универсальностью и не зависят от внешних условий движения среды (от вида выражений для m, τ, q). При заданных начальных параметрах ρ_0, u_0, p_0, U_0 конкретные значения коэффициентов пропорциональности $\mathbf{g}_*$ определяются только видом функциональной зависимости для внутренней энергии и скоростью фронта D.

Для большинства практически важных случаев (для ударных и детонационных волн), когда справедливы следующие неравенства

$$p_* > p_0, \rho_* > \rho_0, u_* > u_0, M_* < 1,$$

можно показать, что коэффициенты пропорциональности, стоящие перед производной dD / dt отрицательны. Тогда из (6) следует, что для одномерных адиабатических движений при ускорении фронта волны ($dD / dt > 0$) плотность, давление и массовая скорость газа уменьшаются при приближении к фронту, т.е. $(\partial \mathbf{y} / \partial r)_* < 0$.

Итак, при естественном предположении к виду внутренней энергии среды получены более универсальные, по сравнению с ранее известными, ЧПП функций газодинамических параметров за поверхностью сильного разрыва (за фронтом ударных и детонационных волн), что позволяет расширить область их возможных применений в приложениях (например, при построении численных и аналитических приближенных решений газодинамических задач).

Список использованной литературы

1. **Гинзбург И. П.** Прикладная гидрогазодинамика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. 337 с.
2. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. **Митрофанов В. В.** Детонация гомогенных и гетерогенных систем. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2003. 200 с.
4. **Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. 552 с.
5. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1963. 386 с.
6. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 804 с.

УЧЕТ НЕСЖИМАЕМОСТИ ДЛЯ ВОЛН В ЖИДКОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Пыркова О. А.
ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Волны, распространяющиеся в толще океана, можно разбить на две категории:

① акустические волны высокой частоты, которые возникают из-за небольшой сжимаемости морской воды, и

② волны с существенно меньшей частотой, к которым относятся внутренние, инерционные и планетарные волны, вызванные гравитационными и центробежными силами.

Распространение звуковых волн в океане описывается обычным линейным волновым уравнением с фазовой скоростью $c_s \cong 1{,}5 \cdot 10^3 м / с$. Акустические волны в океане обычно находятся в области частот от 1 Гц до 100кГц. Таким образом, периоды акустических волн лежат в диапазоне $T_s = 1 \div 10^{-5}$ $с$ с длиной волны

$L_s\left(=c_sT_s\right)$ от нескольких километров до одного сантиметра. Внутренние, инерционные и планетарные волны, с другой стороны, имеют период от минуты до месяцев с соответствующими длинами волн от десятков метров до сотен километров. Таким образом, дисперсионные кривые таких волн в плоскости период - волновое число расположены далеко от таких кривых для звуковых волн, и поэтому можно считать, что взаимодействие между этими волнами будет слабым.

Для акустических, или звуковых, волн эффект сжимаемости среды является определяющим фактором. По своей природе звуковые волны родственны продольным упругим волнам в твердых телах и обусловлены силами упругости, возникающими при деформации элемента объема жидкости.

В океане акустические волны играют огромную роль, такую же, как скажем, электромагнитные волны в атмосфере. Последние быстро затухают в морской воде, в то время как звуковые волны могут распространяться на тысячи километров. Поэтому они широко используются для исследования океана, а также как средство связи и передачи информации. В атмосфере звуковые волны очень низких частот (инфразвук) тоже могут распространяться на тысячи километров.

Все океанические внутренние волны совершенно не связаны со звуковыми волнами. Действительно, условие того, что волновое число велико по сравнению со значением $\left[-\frac{1}{\rho_0(z)}\frac{d\rho_0(z)}{dz}\right]$, вполне выполняется даже при длинах волн, сравнимых с океаническими глубинами, так как изменение плотности в океане не превосходит 4%. Это максимальное изменение является главным образом результатом огромных давлений, около 10^8 Н/м^2, обнаруженных на самых больших океанических глубинах порядка 10 км.

В предыдущей работе [4] в линейном приближении были получены основные уравнения для волн в жидкости в стационарном случае

$$\begin{cases} U_0\dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x}=f_x, \\ U_0\dfrac{\partial v'}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial y}=f_y, \\ U_0\dfrac{\partial w'}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z}+g\dfrac{\rho'}{\rho_0}=f_z, \\ \\ U_0\dfrac{\partial \rho'}{\partial x}+w'\dfrac{d\rho_0}{dz}+\rho_0\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}\right)=0, \\ U_0\dfrac{\rho_0}{\gamma p_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x}-U_0\dfrac{\partial \rho'}{\partial x}+\dfrac{\rho_0 w'}{g}N^2=0, \end{cases} \tag{1}$$

в которых учтено изменение ее плотности ρ за счет сжимаемости. Последнее описывается уравнением состояния.

Итак, наиболее важным следствием сжимаемости жидкости являются акустические волны, которые мы рассматривать не будем, так как

а) при медленном изменении возмущенной плотности $\rho_0(z)$ в масштабе длины волны внутренние и звуковые волны совершенно не связаны друг с другом; ни один из этих двух типов волн не влияет на наличие другого [2], и, следовательно, их можно изучать отдельно;

б) для внутренних волн сжимаемость среды проявляется лишь в виде некоторых поправок (например, в дисперсионных уравнениях), которыми мы пренебрегаем.

Следует заметить, что плотность морской воды в действительности представляет собой функцию давления p, температуры T и **солености** χ (относительного содержания массы растворенных солей): $\rho=\rho(p, T, \chi)$. Состав этих солей меняется, но столь мало, что не вызывает изменений плотности, существенных для динамики океана.

Температурные изменения в океане от точки замерзания морской воды 271 К до значения порядка 300 К вызывают изменения плотности порядка 0,5%. Изменения солености в пределах от $\chi=$ 0,034 до $\chi=0{,}037$ вызывают изменения плотности порядка 0,2%.

Парадоксально, что изменения плотности, обусловленные колебаниями температуры и солености, играют в динамике океана гораздо более важную роль, чем превосходящие их изменения плотности вплоть до 4%, обусловленные колебаниями давления. В действительности на динамику океана доминирующее влияние оказывает распределение не фактической плотности, а величины $\rho_a(T, \chi)=\rho(p_a, T, \chi)$, определяемой как плотность, которую имела бы вода заданной температуры T и солености χ, если бы давление в ней было доведено до атмосферного давления p_a без изменения T и χ. Чтобы определить изменение T и χ с глубиной, океанографы спускают с исследовательских кораблей самописцы температуры, солености и глубины; тогда распределение ρ_a с глубиной можно снять с диаграмм.

Здесь мы объясним доминирующую роль ρ_a для внутренних волн, динамика которых, как будет показано далее, определяется распределением **частоты Вяйсяля - Брента**

$$N^2 = -g\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c^2}\right) = -g\left(\frac{d\ln\rho}{dz} + \frac{g}{c^2}\right). \tag{2}$$

В [2] показано, что если $T_0(z)$ и $\chi_0(z)$ представляют собой невозмущенные распределения температуры и солености с глубиной, а $\rho_{a0}(z) = \rho_a\left(T_0(z),\, \chi_0(z)\right)$ является соответствующим распределением плотности с поправкой на атмосферное давление, то с большой точностью

$$N = \left[-g\frac{1}{\rho_{a0}(z)}\frac{d\rho_{a0}(z)}{dz}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Это означает, что динамика внутренних волн зависит только от вертикального распределения ρ_a.

Физически это происходит потому, что при океанических температурах обратимые изменения в воде очень близки к изотермическим. Жидкость, поднимающаяся на более высокий уровень, сохраняет свою соленость и, с высокой степенью приближения, свою температуру. Поэтому она сохраняет свое начальное значение величины ρ_a, так что ***восстанавливающая сила*** $F = -mN^2\zeta$ зависит в первую очередь от любого превышения величины ρ_a над ее невозмущенным значением на новом уровне давления.

Формально это можно выразить, записав $\frac{d\ln\rho_0}{dz} = \frac{dp_0}{dz}\frac{\partial\ln\rho}{\partial p} + \frac{dT_0}{dz}\frac{\partial\ln\rho}{\partial T} + {} + \frac{d\chi_0}{dz}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\chi}$, где $\frac{\partial p_0(z)}{\partial z} = -g\rho_0(z)$ и где производная $\frac{\partial\rho}{\partial p}$ при постоянных T и χ равна c_N^{-2}, то есть величине обратной квадрату «ньютоновой» скорости звука ($c^2 = \gamma c_N^2$, где $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$, $c_N^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T$, $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$). Поэтому формула (2) для $N(z)$ дает

$$\left[N(z)\right]^2 = g^2\left(c_N^{-2} - c_0^{-2}\right) - g\left\{\frac{dT_0}{dz}\frac{\partial\ln\rho}{\partial T} + \frac{d\chi_0}{dz}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\chi}\right\}. \tag{4}$$

Приближение (3) получено за счет:

① пренебрежения первым слагаемым в правой части (4): пользуясь вышеприведенными соотношениями для разности между скоростью звука c_0 и ее ньютоновским значением c_N, мы можем выразить ошибку, вносимую за счет данного допущения, через удельную теплоемкость морской воды (около 3950 дж/кг $\cdot$К$^{-1}$) и ее коэффициент расширения α, а именно в виде $\frac{g^2\alpha^2 T}{c_p}$. Наибольшее значение коэффициента α в океане, обнаруженное в самых теплых водах, равно приблизительно $3\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$; при этом величина $\frac{g^2\alpha^2 T}{c_p}$ составляет примерно $7\cdot10^{-7}$ с$^{-2}$. Если мы сравним это с характерным приращением значения величины N^2 в таких теплых водах, равным приблизительно $3\cdot10^{-5}$ с$^{-2}$, то увидим, что получающаяся при этом максимальная ошибка в N едва превосходит 1%.

② замены выражения, стоящего в фигурных скобках в (4), его значением $\frac{1}{\rho_{a0}(z)}\frac{d\rho_{a0}(z)}{dz}$ при атмосферном давлении. Для холодной воды на больших глубинах преобладает ошибка, возникающая в результате такой замены: при таких низких температурах коэффициент расширения $\alpha = \frac{\partial\ln\rho}{\partial T}$, хотя всегда и неотрицательный для морской воды, является весьма малой величиной, порядка $1\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$, и увеличивается примерно на $2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$ при давлениях, доходящих до 10^8 Н/м^2. Хотя получающаяся при этом процентная ошибка для N на таких глубинах возрастает до 10%, абсолютная ошибка в N^2 оказывается меньшей, чем ранее (самое большее $4\cdot10^{-7}$ с$^{-2}$, что получается, если ошибку в $g\alpha$ умножить на характерный для глубоких вод температурный градиент, доходящий до двух градусов на километр).

Таким образом, в дальнейшем в основных уравнениях принимается, что океан является **несжимаемой** жидкостью, то есть выполняется условие

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s = 0, \tag{5}$$

где s - энтропия. Так как в действительности $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c_s^2}$, то допущение (5) равносильно утверждению, что в принятой модели океана локальная скорость звука равна бесконечности. Далее будем считать, что в океане можно пренебречь процессами молекулярной диффузии. Формально переход к несжимаемой жидкости можно осуществить, потребовав постоянства плотности в жидкой частице, то есть в отсутствие сжимаемости и диффузии плотность жидкой частицы не должна изменяться вдоль траектории частицы:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{6}$$

При этом непосредственно из точного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \tag{7}$$

следует, что при движении жидкости уравнение неразрывности принимает вид

$$\nabla \vec{v} = 0. \tag{8}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условием применимости приближения несжимаемой жидкости $(c = \infty)$ будет требование, чтобы скорость распространения рассматриваемых возмущений была значительно меньше скорости звука $\left(M = \frac{U}{c} << 1\right)$.

Система стационарных линейных уравнений для несжимаемой жидкости принимает вид

$$\begin{cases} U_0 \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x} = f_x, \\ U_0 \dfrac{\partial v'}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial y} = f_y, \\ U_0 \dfrac{\partial w'}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p'}{\partial z} + g\dfrac{\rho'}{\rho_0} = f_z, \\ \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} + \dfrac{\partial w'}{\partial z} = 0, \\ U_0 \dfrac{\rho_0}{\gamma p_0}\dfrac{\partial p'}{\partial x} - U_0 \dfrac{\partial \rho'}{\partial x} + \dfrac{\rho_0 w'}{g} N^2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В заключение отметим, что в дальнейшем будут использоваться следующие упрощения:

- адиабатичность;
- приближение Буссинеска.

Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/500.

Список использованной литературы

1. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963.
2. **Лайтхилл Джеймс.** Волны в жидкостях. М: Мир, 1981.
3. **Пыркова О. А.** О возможности приближенного учета действия вязкости в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: междувед. сб. МФТИ. М., 1995. С. 154-165.
4. **Пыркова О. А.** Линейные уравнения для волн в жидкости // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2008. № 12 (19): Математика, физика, строительство, архитектура, технические науки и методика их преподавания. С. 129-134.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯРОИДОВ ДЛЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН

Резак Е. В.
Хабаровский институт инфокоммуникаций ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Развитие волоконной техники привело к созданию усилителей, генераторов светового диапазона и датчиков, рабочим телом в которых является одномодовое оптическое волокно. На сегодняшний день пиковая мощность импульсных волоконных лазеров достигает единиц киловатт. Для упрощения конструкции все узлы таких лазеров стремятся сделать на основе того же волокна. Современные волоконно-оптические датчики позволяют измерять почти все [Скляров, 2001, с. 10-15]. Например, давление, температуру, расстояние, положение в пространстве, ускорение, колебания, массу, звуковые волны, уровень жидкости, деформацию, коэффициент преломления, электрическое поле, электрический ток, магнитное поле, концентрацию газа, до-