МИНИМИЗАЦИЯ ПОРОЖДАЮЩЕГО БАЗИСА САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Филиппенко В. И.
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

Пусть H - гильбертово пространство, A - самосопряженный оператор, действующий в H, $D(A)$ - его область определения. Оператору A ставится в соответствие спектральная функция E_λ, т.е. семейство проекционных операторов, обладающих свойствами: 1) E_λ - монотонно неубывающая, т. е. $E_\lambda \le E_\mu$ для $\lambda < \mu$; 2) E_λ сильно непрерывна слева; 3) $E_{-\infty} = 0,\ E_{+\infty} = E$ [Наймарк 1969: 144].

Спектр оператора A представляет собой замкнутое множество точек вещественной оси, состоящее из всех ростра функции E_λ. Скачки этой функции соответствуют собственным числам оператора A. Пространство H можно разбить в ортогональную сумму инвариантных относительно A подпространств H_τ и H_ν таких, что в пространстве H_τ оператор имеет чисто точечный спектр, а в пространстве H_ν не имеет собственных элементов. Спектр оператора A в пространстве H_ν называется непрерывным.

Векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ - образуют порождающий базис оператора A, если линейная оболочка всех векторов $E_\Delta x_k, k = 1,2,...,n$, где Δ - пробегает совокупность всех полуинтервалов числовой прямой, плотна в H. Спектр оператора A n - кратный, если n есть минимальное число векторов, образующих порождающий базис. В настоящей статье рассмотрены условия, позволяющие минимизировать порождающий базис самосопряженного оператора, порожденного формально самосопряженной дифференциальной операцией, заданной в гильбертовом пространстве вектор-функций, которые суммируемы с квадратом модуля на бесконечном промежутке. Скалярный случай рассматривался автором ранее [Филиппенко 2007: 86].

Пусть L_1 - замкнутый симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H_1(H \supset H_1)$, являющийся сужением оператора A на гильбертово пространство H_1 и имеющий плотную в H_1 область определения $D(L_1)$. Тогда можно определить спектральную функцию симметрического оператора L_1 следующим образом: спектральная функция F_λ оператора L_1, порождаемая расширением A, задается формулой

$$F_\lambda = PE_\lambda f \ \ (-\infty < \lambda < +\infty;\ f \in H_1), \qquad (1)$$

где P - оператор проектирования в гильбертовом пространстве H на подпространство H_1. Для любых вещественных $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ и любого $f \in H_1$

$$\left(F_\beta - F_\alpha\right) f \in D\left(L_1^*\right) \qquad (2)$$

и

$$L_1^*\left(F_\beta - F_\alpha\right) f = \int_\beta^\beta \lambda dF_\lambda f. \qquad (3)$$

В силу (2) и того, что $L_1 \subset L_1^*$, для любого $f \in H_1$ и любого $g \in D(L_1)$ имеет место равенство $\left(L_1^*\left(F_\beta - F_\alpha\right) f, g\right) - \left(\left(F_\beta - F_\alpha\right) f, L_1^*\right) = 0,$ представимое в виде

$$\int_\alpha^\beta \left(\left(L_1^* dF_\lambda f, g\right) - \left(dF_\lambda f, L_1^* g\right)\right) = 0. \qquad (4)$$

При любом комплексном λ обозначим через $\tilde{L}_\lambda$ многообразие всех $\tilde{g} \in D(A)$ таких, что $A\tilde{g} - \lambda\tilde{g} \in H_1$.

Положим $L_\lambda = P\tilde{L}_\lambda$. Легко видеть, что $L_\lambda \subset D\left(L_1^*\right)$ и для любого $\tilde{g} \in \tilde{L}_\lambda$ $L_1^* P\tilde{g} = PA\tilde{g}$.

Действительно для $f \in D(L_1)$ $(L_1 f, P\tilde{g}) = (L_1 f, \tilde{g}) = (f, A\tilde{g}) = (f, PA\tilde{g})$.

Теорема (А. В. Штраус). *Пусть* $g(\lambda)$ *- векторная функция вещественного параметра* λ $(\alpha \le \lambda \le \beta)$, *для которой выполняются следующие условия:*

1) $g(\lambda) = \phi_1(\lambda) g_1 + \phi_2(\lambda) g_2 + ... + \phi_m(\lambda) g_m$, *где* $g_k(\lambda)$ $(k = 1,2,...,m)$ *- комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию Липшица;*

2) при любом $\lambda \in [\alpha, \beta]$ $g(\lambda) \in L_\lambda$.

Тогда для любого $f \in H_1$ *и любого* $\mu \in [\alpha, \beta]$ *имеет место равенство*

$$\int_\alpha^\beta \left(\left(L_1^* dF_\lambda f, g(\lambda)\right) - \left(dF_\lambda f, L_1^* g(\lambda)\right)\right) = 0.$$

2. Пусть $l[y] = -y'' + Q(x) y$ - формально самосопряженное дифференциальное выражение. $Q(x)$ - ве-

щественнозначная матрица-функция порядка n. Кроме того, $Q(x)$ измерима и локально суммируема в сильном смысле и при каждом $x\in(a,b)$ $Q(x)=Q^*(x)$. Выражение $l[y]$ имеет смысл для каждой функции $y(x)$, которая на любом отрезке $[a',b']\subset(a,b)$ абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной и $l[y]\in L_n^2(a,b)$. L_0 - минимальный симметрический оператор, порожденный операцией l в гильбертовом пространстве $L_n^2(a,b)$. Каждой векторной функции $y(x)$, для которой $l[y]$ имеет смысл, поставим в соответствие вектор-функцию $\hat{y}(x)=\left(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x),y_1'(x),y_2'(x),...,y_n'(x)\right)$; будем рассматривать $\hat{y}(x)$ при любом значении $x\in(a,b)$ как матрицу-столбец. Обобщенная спектральная функция F_λ порождена ортогональной спектральной функцией самосопряженного оператора A, заданного в гильбертовом пространстве $L_n^2[a,b]$. $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_n^2[a_1,b_1]$.

Положим $J=\begin{bmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix}$. Тогда аналог тождества Лагранжа примет следующий вид $\left(l[y],z\right)-\left(y,l[z]\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\hat{z}^*J\hat{y}\right)$.

Через $U_1(x,\lambda)$ и $U_2(x,\lambda)$ обозначим фундаментальную систему решений матричного уравнения $l[Y]=\lambda Y$, удовлетворяющих начальным условиям

$$U_1(x_0,\lambda)=I_n,\ U_2(x_0,\lambda)=0,\ U_1'(x_0,\lambda)=0,\ U_2'(x_0,\lambda)=I_n, \tag{5}$$

где x_0 - произвольная фиксированная точка промежутка (a,b).

Для любых вещественных α и β оператор $E_\beta-E_\alpha$ является интегральным, его ядро $K_{\alpha,\beta}(x,s)$ представимо в виде $K_{\alpha,\beta}(x,s)=\int\limits_\alpha^\beta\left(U_1(x,\lambda)U_2(x,\lambda)\right)dT(\lambda)\begin{pmatrix}U_1^*\\ U_2^*\end{pmatrix}$; $T(\lambda)$ - эрмитово неубывающая матрица-функция порядка $2n$, называемая спектральной матрицей-функцией оператора A.

Лемма. *Пусть для любого $\lambda\in[\alpha,\beta]$ уравнение $l[y]=\lambda y$ имеет решение $v(x,\lambda)$ такое, что:*

1) $\int\limits_c^b\left|v(x,\lambda)\right|^2dx<\infty$, где c какая-либо внутренняя точка промежутка (a,b);

2) для любой функции $f(x)\in D(A)$ $\hat{f}^*(x)J\hat{v}(x,\lambda)\big|_{x=b}=0$;

3) при любом фиксированном $x\in(a,b)$ вектор-функция $\hat{v}(x,\lambda)$ удовлетворяет условию Липшица относительно λ на сегменте $[\alpha,\beta]$.

Тогда для любых $\mu_1,\mu_2\in[\alpha,\beta]$ $\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\hat{v}^*(x_0,\lambda)JdT(\lambda)=0.$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый промежуток $[a_1,b_1]\subset(a,b)$; здесь $a_1\neq a$ и $b_1=x_0\neq b$. Пусть L_1 - минимальный симметрический оператор, заданный в гильбертовом пространстве $L_n^2[a_1,b_1]$ дифференциальным выражением $l[y]$. Введем матрицы $G_1(x)$ и $G_2(x)$ размерности $n\times n$, столбцы которых принадлежат $D\left(L_1^*\right)$, удовлетворяющие следующим условиям

$$G_k^{(j-1)}(a_1)=0,\ G_k^{(j-1)}(b_1)=\delta_{kj}I_n\ (k,j=1,2).$$

Пусть $v(x,\lambda)$ удовлетворяет условиям леммы. Положим

$$\tilde{g}=\tilde{g}(\lambda)=\tilde{g}(x;\lambda)=\begin{cases}0\ \textit{при}\ x\in(a,a_1],\\ G_1(x)v(b_1,\lambda)+G_2(x)v'(b_1,\lambda)\ \textit{при}\ x\in[a_1,b_1],\\ v(x,\lambda)\ \textit{при}\ x\in[b_1,b).\end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{g}(x;\lambda)\in D\left(L_0^*\right)$, более того $\tilde{g}(\lambda)\in\tilde{L}_\lambda$. Значит,

$$g(\lambda)=G_1(x)v(b_1,\lambda)+G_2(x)v^{(1)}(b_1,\lambda)$$

принадлежит L_λ. Пусть F_λ - обобщенная спектральная функция оператора L_1. Она порождена ортогональной спектральной функцией самосопряженного операторам A, заданного в гильбертовом пространстве $L_n^2[a,b]$. $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_n^2[a_1,b_1]$. Следовательно, для любой векторной функции $f=f(x)$ из пространства $L_n^2[a_1,b_1]$:

$$\int_{\alpha}^{\mu}\left(\left\langle L_1^* dF_\lambda f, g\right\rangle_1 - \left\langle dF_\lambda f, L_1^* g\right\rangle_1\right) = 0 \qquad (6)$$

Рассмотрим отрезок $\Delta = [\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$. F_λ - интегральный оператор. $U_1(x,\lambda)$ и $U_2(x,\lambda)$ - являются решениями уравнения $l[Y] = \lambda Y$, удовлетворяющими условиям (5). Положим $\eta(f,\lambda) = \int_a^{b_1}\begin{pmatrix} U_1^*(x,\lambda) \\ U_2^*(x,\lambda)\end{pmatrix} f(x)\,dx$,

$$h_\Delta = h_\Delta(x) = h_\Delta(x; f) = F_\Delta f = \int_\Delta \left(U_1(x,\lambda) U_2(x,\lambda)\right) dT(\lambda)\eta(f,\lambda).$$

Тогда $\left(l[h_\Delta], g\right) - \left(h_\Delta, l[g]\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\hat{g}^* J \hat{h}_\Delta\right)$ и, следовательно,

$$\int_{a_1}^{b_1}\left(\left(l[h_\Delta], g\right) - \left(h_\Delta, l[g]\right)\right)dx = \hat{g}^*(x) J \hat{h}_\Delta(x)\Big|_{a_1}^{b_1} = \hat{g}^*(b_1) J \hat{h}_\Delta(b_1) = \hat{v}^*(x_0;\lambda) J \int_\Delta dT(\lambda)\eta(f;\lambda). \qquad (7)$$

Поскольку $U(x_0;\lambda) = \begin{pmatrix} U_1(x_0;\lambda) & U_2(x_0;\lambda) \\ U_1'(x_0;\lambda) & U_2'(x_0;\lambda)\end{pmatrix} = I_{2n}$ то в силу соотношений (6) и (7), имеем $\int_\alpha^\mu \hat{v}^*(x_0;\lambda) JT(\lambda)\eta(f;\lambda) = 0$, т. е. $\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_\alpha^\mu \hat{v}^*(x_0,\lambda) J dT(\lambda)\begin{pmatrix} U_1^*(s,\lambda) \\ U_2^*(s,\lambda)\end{pmatrix}\right) f(s)\,ds = 0$. Так как $f(s)$ - произвольная функция из пространства $L_n^2(a_1, b_1)$, то отсюда следует, что

$$\int_\alpha^\mu \hat{v}^*(x_0,\lambda) J dT(\lambda)\begin{pmatrix} U_1^*(s,\lambda) \\ U_2^*(s,\lambda)\end{pmatrix} \equiv 0$$

(тождественно по s). Переходя здесь к производным по переменной s, получим

$$\int_\alpha^\mu \hat{v}^*(x_0;\lambda) JT(\lambda) U^*(s;\lambda) \equiv 0.$$

Полагая $s = x_0$, приходим к требуемому равенству. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть при любом $\lambda \in [\alpha, \beta]$ уравнение $l[y] = \lambda y$ имеет $m = m' + m''$ линейно независимых решений*

$$v_1(x,\lambda), v(x,\lambda), ..., v_m(x,\lambda) \qquad (8)$$

таких, что:

1) для каждого из m' первых решений (8)

а) $\int_a^c \left|v_k(x,\lambda)\right|^2 dx < \infty \quad (a < c < b);$

б) $\hat{f}^*(x) J \hat{v}_k(x,\lambda)\Big|_{x=a} = 0,$ *какова бы ни была вектор-функция $f(x) \in D(A)$;*

2) для каждого из m'' последних решений (8)

а) $\int_c^b \left|v_k(x,\lambda)\right|^2 dx < \infty \quad (a < c < b);$

б) $\hat{f}^*(x) J \hat{v}_k(x,\lambda)\Big|_{x=a} = 0,$ *какова бы ни была вектор-функция $f(x) \in D(A)$;*

3) каждая из вектор-функций $\hat{v}_k(x;\lambda)$ при любом фиксированном $x \in (a,b)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной λ на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Тогда кратность части спектра оператора самосопряженного A, заключенной в сегменте $[\alpha, \beta]$, не превосходит $2n - m$.

Доказательство. Рассмотрим спектральное разложение элемента $f(x) \in L_n^2(a,b)$; как известно,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(U_1(x,\lambda) U_2(x,\lambda)\right) dT(\lambda)\eta(f,\lambda) \qquad (9)$$

и построим матрицу

$$V(x;\lambda)=\begin{pmatrix}\hat{v}_1^*(x;\lambda)\\ \ldots\ldots\\ \hat{v}_m^*(x;\lambda)\\ \ldots\ldots\\ \hat{v}_{2n}^*(x;\lambda)\end{pmatrix},$$

составленную из $2n$ линейно независимых решений уравнения $l(y)=\lambda y$ и их производных, первые m из которых удовлетворяют условиям теоремы 1.

Перепишем соотношение (9) в виде

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(U_1(x;\lambda)U_2(x;\lambda)\right)\left(V(x_0,\lambda)J\right)^{-1}V(x_0;\lambda)JdT(\lambda)\left(V(x_0;\lambda)J\right)^*\left(\left(V(x_0;\lambda)J\right)^*\right)^{-1}\eta(f;\lambda). \qquad (10)$$

Выражение (10) можно рассматривать как спектральное разложение с матрицей-функцией распределения $S(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}V(x_0;\lambda)JdT(\lambda)\left(V(x_0;\lambda)J\right)^*$.

Пользуясь леммой, приходим к выводу, что на отрезке $[\alpha,\beta]$ m первых строк матрицы $S(\lambda)$ обращаются в нуль. Значит, кратность спектра оператора $\tilde{A}$ в промежутке $[\alpha,\beta]$ не превосходит $2n-m$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если какой-либо из операторов с минимальной областью определения, порожденных операцией l в пространствах $L_n^2(a,c)$ и $L_n^2(c,b)$ имеет индекс дефекта (n,n), то можно опустить условие 1 б) или 2 б), так как его выполнение обеспечивается в этом случае условием 1 а) или 2 а).

3. В случае, когда конец a промежутка (a,b) регулярен, дефектное число r оператора L_0 с минимальной областью определения, порожденного в пространстве L^2_n *(a, b)* операцией l, удовлетворяет неравенству $n\le r\le 2n$.

Пусть самосопряженный оператор A, являющийся расширением оператора L_0, определяется разделяющимися краевыми условиями. Тогда систему краевых условий в точке a можно записать в виде $U\hat{y}(a)=0$, где U - некоторая прямоугольная матрица, состоящая из n линейно независимых строк и $2n$ столбцов, такая, что $UJU^*=0$.

Теорема 2. *Пусть при любом $\lambda\in[\alpha,\beta]$ уравнение $l[y]=\lambda y$ имеет q линейно независимых решений $v_1(x;\lambda),\ldots,v_q(x;\lambda)$ таких, что:*

1) $v_k(x;\lambda)\in L_n^2(a,b)$ $(k=1,2,\ldots,q)$;

2) $\hat{f}^*(x)J\hat{v}_k(x;\lambda)\big|_{x=b}=0$ $(k=1,2,\ldots,q)$ для любых вектор-функций $f(x)\in D(A)$;

3) линейная комбинация $\sum_{k=1}^{q}c_kv_k(x;\lambda)$ удовлетворяет системе краевых условий в точке a лишь в том случае, когда $c_1=\ldots=c_q=0$;

4) каждая из вектор-функций $v_k(x;\lambda)$ при любом фиксированном $x\in(a,b)$ удовлетворяет условию Липшица относительно $\lambda\in[\alpha,\beta]$.

Тогда кратность части спектра оператора самосопряженного A, заключенной в сегменте $[\alpha,\beta]$ не превосходит $n-q$.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 позволяют получить оценки кратности спектра оператора A в терминах коэффициентов дифференциальной операции.

Список использованной литературы

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. Филиппенко В. И. Оценка кратности спектра квазидифференциального оператора // Исследования по математическому анализу, математическому моделированию и информатике. Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РАО-А, 2007.