Список использованной литературы

1. **Lee A. L., Gonzalez M. H.** The Viscosity of Natural Gases // J. Petr.Technol. 1966. № 8. Pp. 997-1000.
2. **Общесоюзные нормы технологического проектирования. Магистральные трубопроводы. Ч. 1. ОНТП 51-1-85.** М.: Мингазпром, 1985. 220 с.
3. **Губин В. Е., Губин В. В.** Трубопроводный транспорт нефти и нефтепродуктов. М.: Недра, 1982. 296 с.
4. **Папуша А. Н.** Проектирование морского подводного трубопровода: расчет на прочность, изгиб и устойчивость морского трубопровода в среде Mathematica. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 238 с.
5. **Сухарев М. Г., Карасевич А. М.** Технологический расчет и обеспечение надежности газо- и нефтепроводов. М.: Нефть и газ, 2000. 272 с.
6. **Offshore Standard DNV-OS-F101. Submarine Pipelines Systems** [Электронный ресурс]. URL: www.dnv.com

НЕСВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ РАДИАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ЦИЛИНДРА

Шляхин Д. А.
Самарский государственный архитектурно-строительный университет

1. Постановка задачи. В настоящей работе исследуется полый анизотропный цилиндр, занимающий в цилиндрической системе координат (r_*,θ,z_*) область $\Omega:\ \{a \le r_* \le b, 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ 0 \le z_* \le h\}$, и выполненный из пьезокерамического материала с наведенной радиальной поляризацией.

Краевая задача моделирует работу пьезоэлементов в приборах прямого при действии на внешней криволинейной поверхности цилиндра нормальных напряжений $q(z_*,t_*)$. Принимаем неэлектродированные торцевые плоскости свободными от механических напряжений, а радиальные поверхности электродироваными с заземлением закрепленной внутренней ее части.

При решении несвязанной задачи прямого пьезоэффекта используется допущение, что индуцируемое в пьезокерамической среде электрическое поле не оказывает влияние на механические напряжения.

В результате получаем систему дифференциальных уравнений, граничные и начальные условия динамической задачи теории упругости в безразмерной форме [Партон, 1988]:

$$\nabla^2 U - \frac{C_{11}}{C_{33}}\frac{U}{r^2} + \frac{C_{55}}{C_{33}}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}+C_{55})}{C_{33}}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(C_{13}-C_{12})}{C_{33}}\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{C_{55}}{C_{33}}\nabla^2 W + \frac{C_{11}}{C_{33}}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13}+C_{55})}{C_{33}}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + \frac{(C_{12}+C_{55})}{C_{33}}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

$$z = 0, L \quad C_{13}\frac{\partial U}{\partial r} + C_{12}\frac{U}{r} + C_{11}\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$U(r,0,t) = U_1(r,t),\ U(r,L,t) = U_2(r,t)$$

$$r = 1, k \quad U(k,z,t) = W(k,z,t) = 0 \quad (1.3)$$

$$C_{33}\frac{\partial U}{\partial r} + C_{13}\left(U + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = q(z,t)_{|r=1},\ \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)_{|r=1} = 0$$

$$t = 0 \quad U(r,z,0) = U_0(r,z),\ \dot U(r,z,0) = \dot U_0(r,z) \quad (1.4)$$

$$W(r,z,0) = W_0(r,z),\ \dot W(r,z,0) = \dot W_0(r,z)$$

где $U^*(r_*,z_*,t_*), W^*(r_*,z_*,t_*)-$ компоненты вектора перемещений $(j,k = r_*,\theta,z_*)$; $\varphi^*(r_*,z_*,t_*)-$ потенциал электрического поля; ρ, C_{ms}, e_{ms} – объемная плотность, модули упругости, а также пьезомодули электроупругого материала $(m,s=\overline{1,5})$; $\varepsilon_{11},\varepsilon_{33}-$ диэлектрические проницаемости; $\{U,W,r,z,L,k\} = \{U^*,W^*,r_*,z_*,h,a\}/b$, $t = t_* b^{-1}\sqrt{C_{33}/\rho}$, U_1,U_2 - известные радиальные перемещения торцов на криволинейных поверхностях; $U_0,\dot U_0$, известные в начальный момент времени перемещения, скорости перемещений; $\nabla^2 = \partial^2/\partial r + r^{-1}\,\partial/\partial r$.

Точка означает дифференцирование по t.

На втором этапе исследования рассматривается задача электроупругости, считая известными (найденными) компоненты вектора перемещений U,W.

В результате получаем такое дифференциальное уравнение и краевые условия для электрического потенциала в безразмерной форме :

$$\nabla^2\varphi+\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{e_{15}}{C_{33}\varepsilon_{33}}Y \tag{1.5}$$

$$z=0,L \quad D_z=C_{33}\varepsilon_{11}e_{15}^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=e_{15}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{1.6}$$

$$r=1,k \quad \varphi(k,z,t)=0\,,\ D_{r|r=1}=C_{33}\varepsilon_{33}e_{15}^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=e_{31}\left(\frac{U}{r}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+e_{33}\frac{\partial U}{\partial r} \tag{1.7}$$

где $Y=e_{33}\nabla^2U+e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+e_{15}\frac{\partial^2U}{\partial z^2}+(e_{15}+e_{31})\frac{\partial^2W}{\partial r\partial z}+e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}$, $\varphi=\frac{\varphi^*e_{15}}{bC_{33}}$

Соотношения (1.1) - (1.7) и представляют математическую формулировку несвязанной начально-краевой задачи электроупругости.

2. Построение общего решения начально-краевой задачи теории упругости. Решение осуществляется методом интегральных преобразований, используя последовательно синус- и косинус преобразования Фурье с конечными пределами по переменной z и обобщенное конечное интегральное преобразование (КИП) [Сеницкий, 1991] по радиальной координате r.

Результатом решения являются следующие разложения для $U(r,z,t)$, $W(r,z,t)$:

$$U(r,z,t)=H_1(r,z,t)+\sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{-1}\left[H_5(r,n,t)+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)K_1(\lambda_{in},r)\|K_{in}\|^{-2}\right]\sin j_nz \tag{2.1}$$

$$W(r,z,t)=H_2(r,z,t)+\sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{-1}\left[H_6(r,n,t)+\sum_{i=1}^{\infty}G(\lambda_{in},n,t)K_2(\lambda_{in},r)\|K_{in}\|^{-2}\right]\cos j_nz$$

где H_1,H_2,H_5,H_6- стандартизирующие функции, $G(\lambda_{in},n,t)-$ трансформанта нагрузки, $K_1(\lambda_{in},r),K_2(\lambda_{in},r)$ - компоненты вектор - функции ядра преобразования, $\|K_{in}\|^2-$ квадрат нормы.

3. Построение общего решения краевой задачи электростатики. Решение осуществляется методом интегральных преобразований, используя последовательно конечные косинус- преобразование Фурье по переменной z и преобразование Ханкеля по радиальной координате r.

В результате построения данного получаем

$$\varphi(r,z,t)=H_7(r,z,t)+\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n^{-1}\cos(j_nz)\left[H_{9c}(r,n,t)+2\sum_{x=1}^{\infty}\psi_H(\xi_x,n,t)J_0(\xi_xr)J_0(\xi_x)^{-2}\right] \tag{3.1}$$

Разность потенциалов $Q(t)$ между электродированными радиальными поверхностями определяется по формуле

$$Q(t)=L^{-1}\int_0^L\varphi(1,z,t)dz \tag{3.2}$$

которая с учетом отсутствия касательных напряжений при $r=1$ окончательно принимает следующий вид

$$Q(t)=L^{-1}\left\{H_{9c}(1,0,t)+2\pi^2\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\psi_H(\xi_x,0,t)\left[Y_0(\xi_xk)J_0(\xi_x)-J_0(\xi_xk)Y_0(\xi_x)\right]}{\pi^2\left[Y_0(\xi_xk)J_0(\xi_x)-J_0(\xi_xk)Y_0(\xi_x)\right]^2-4\xi_x^{-2}}\right\}$$ где $H_7,H_{9c}-$ стандартизирующая функция, $\psi_H(\xi_x,n,t)-$ трансформанта Ханкеля.

Список использованной литературы

1. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.

2. Сеницкий Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. С. 57-63.