Внутри почти сплошной кладки (нижние ряды сложены из пахсовых блоков, верхние - из сырцовых кирпичей) крестообразного объема расположено три помещения: центральное - прямоугольное в плане (около 2,5х12 м) и два боковых - почти квадратных в плане. Помещения внешнего здания имеют сводчатые покрытия, сложенные из сырцовых кирпичей трапециевидной формы (длиной 45 см, 25 см - узкая сторона, 35 см - широкая сторона и толщина 8-9 см). Внешние фасады как в Чол-Тобе, так и в Кзыл-Кайнаре, оживлены сквозными проемами различного размера, расположенными на высоте около 1,5-2 м [7, с. 210].

Таким образом, на территории современной Центральной Азии функционировали монастырские комплексы, которые включали в свой состав как собственно церкви, так и жилые кельи, библиотеки, хозяйственные помещения. Архитектура этих сооружений, в основном, следовала образцам местной традиции, обусловленной выбором строительного материала (пахсы, сырцового кирпича), климата и рельефа. С другой стороны, наблюдаются и канонические приемы, например, крестовидная планировка церквей с абсидными закруглениями, которые, как известно, воплощают образ христианского первохрама - пещеры с Гробом Господня. Изучение раннесредневекового христианского зодчества Центральной Азии - одно из перспективных направлений в исследовании архитектуры тюркского мира.

Список литературы

1. **Байпаков К. М., Грищенко А. Н., Савельева Т. Н., Ходжаев М. Б.** Археологические исследования Южно-Казахстанской комплексной археологической экспедиции // Известия МНиВО НАН РК. Сер. общ. наук. Алматы, 1999. № 1.
2. **Берзин А.** Историческое взаимодействие буддийской и исламской культур до возникновения Монгольской империи [Электронный ресурс]. URL: http://www.berzinarchives.com/web/x/nav/group.html_1232962266.html (дата обращения: 01.11.2010).
3. **Глаудинов Б. А.** История архитектуры Казахстана. Алматы: КазГАСА, 1999. 295 с.
4. **Залесская В. Н.** Христиане на Востоке. Мелькиты. Монофиситы. Несториане // Христиане на Востоке. Искусство мелькитов и инославных христиан. СПб.: Славия, 1998. С. 12-21.
5. **Карпини Плано.** История монголов // Путешествия в восточные страны Плано Карпини и Гильома де Рубрука. Алматы: Гылым, 1993. 248 с.
6. **Литвинский Б. А.** Архитектура и строительное дело // Восточный Туркестан в древности и раннем средневековье. Архитектура. Искусство. Костюм. М.: Восточная литература РАН, 2000. С. 13-217.
7. **Мерщиев М. С.** Поселение Кзыл-Кайнар-тобе I-IV веков и захоронения на нем воина IV-V века // По следам древних культур Казахстана. Алма-Ата: Наука, 1970. С. 79-85.
8. **Никитин А. Б.** Христианство в Центральной Азии (древность и средневековье) // Восточный Туркестан и Средняя Азия. История. Культура. Связи. М.: Наука, 1984. С. 121-137.
9. **Селезнёв Н.** Уйгуры-христиане и их религиозно-историческая судьба [Электронный ресурс] // Волшебная гора. 2005. Вып. XI. URL: http://krotov.info/libr_min/18_s/el/eznev_2005.htm (дата обращения: 04.11.2010).
10. **Хмельницкий С. Г.** Между Саманидами и монголами. Архитектура Средней Азии XI - начала XIII вв. Берлин-Рига: Gamajun, 1996. Ч. 1. 336 с.

УДК 517.928.4

Сергей Евгеньевич Городецкий
Московский физико-технический институт

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В СИСТЕМАХ ВАЛЛИСА©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/500)

Многие прикладные задачи различных научных отраслей описываются системами дифференциальных уравнений, содержащими несколько (два и более) параметров. Одна из трудностей исследования таких систем состоит в том, что при разных значениях параметров поведение решений может быть принципиально различным.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений размерности три, в окрестности точки неустойчивого равновесия $(0,0,0)$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x),\ A = (a_{ik}) \tag{1}$$

Сделаем следующие предположения относительно матрицы A и функции $f(x)$.

Предположение 1. *Функция* $f(x)$ *имеет в точке* $x=0$ *производные всех порядков,* $f(0)=f'(0)=0$.

Таким образом, функция $f(x)$ содержит только нелинейные члены.

Поведение траекторий, начинающихся из достаточно малой окрестности точки неустойчивого равновесия, зависит от спектральных свойств матрицы A.

Предположение 2. *Матрица* A *имеет комплексные собственные значения* $_1 = \ + i \ , \ _2 = \ - i$ *и вещественное собственное значение* $_3 = \Delta \neq 0$, $0 < \ << \$.

Предположение 3. След матрицы $\operatorname{tr} A < 0$.

В работе [1] доказано, что при выполнении сделанных предположений существует окрестность положения равновесия типа шарового слоя такая, что любая стартующая из неё траектория стремится к предельному циклу.

На примере систем Валлиса покажем, что системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющие сделанным предположениям, встречаются при моделировании практических задач.

В 1986 году Дж. Валлисом были предложены две модели для описания колебаний температуры в западной и восточной частях приэкваториальной области океана, которые оказывают сильное влияние на глобальный климат Земли [2; 3]. Первая модель, которая не учитывает влияния пассатных ветров, представляет собой систему трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{y} \quad - a\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x}\tilde{z} - \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{z}} = 1 - \tilde{x}\tilde{y} - \tilde{z}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde{x}$ - скорость движения воды на поверхности океана, $\tilde{y} = \frac{1}{2}(T_w - T_e)$, $\tilde{z} = \frac{1}{2}(T_w + T_e)$, T_w и T_e - температура соответственно в западной и восточной частях океана, a и - положительные параметры.

Эта система имеет три неподвижные точки

$$O_1(0,0,1),\ O_2\left(\sqrt{\frac{\ -a}{a}}, \frac{1}{\ }\sqrt{a(\ -a)}, \frac{a}{\ }\right),\ O_3\left(-\sqrt{\frac{\ -a}{a}}, -\frac{1}{\ }\sqrt{a(\ -a)}, \frac{a}{\ }\right)$$

Рассмотрим поведение системы в окрестности точки O_1. Для этого сделаем замену переменных $x = \tilde{x},\ y = \tilde{y},\ z = \tilde{z} - 1$. В результате система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \quad - ax, \\ \dot{y} = x + xz - y, \\ \dot{z} = -xy - z. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для линеаризованной системы:

$$\det\begin{pmatrix} -a- & & 0 \\ 1 & -1- & 0 \\ 0 & 0 & -1- \end{pmatrix} = 0,$$

$$(\ +1)(\ ^2 + (a+1)\ + a - \ ) = 0.$$

У квадратного уравнения $\ ^2 + (a+1)\ + a - \ = 0$ дискриминант равен $D = (a+1)^2 - 4(a - \ ) = (a-1)^2 + 4\$. По условию задачи параметры a и положительны, поэтому характеристическое уравнение имеет три вещественных корня. Значит, в окрестности положения равновесия O_1 рассмотренный в предыдущей главе процесс перехода не реализуется.

Теперь линеаризуем систему в окрестности положения равновесия O_2. Сделаем замену переменных

$$\tilde{x} = x + \sqrt{\frac{\ -a}{a}},\ \tilde{y} = y + \frac{1}{\ }\sqrt{a(\ -a)},\ \tilde{z} = z + \frac{a}{\ }.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y\ \ , \\ \dot{y} = \frac{a}{\ }x - y + z\sqrt{\frac{\ -a}{a}} + xz, \\ \dot{z} = -\frac{1}{\ }\sqrt{a(\ -a)} \cdot x - \sqrt{\frac{\ -a}{a}} \cdot y - z - xy. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для линеаризованной системы:

$$\det\begin{pmatrix} -a- & & 0 \\ \dfrac{a}{} & -1- & \sqrt{\dfrac{-a}{a}} \\ -\dfrac{1}{}\sqrt{a(\ \ -a)} & -\sqrt{\dfrac{-a}{a}} & -1- \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \ ^3+(a+2)\ ^2+\left(a+\frac{}{a}\right)\ +2(\ \ -a)=0 \qquad (3)$$

Выясним, в каком случае это уравнение имеет два комплексно сопряжённых корня с малой положительной вещественной частью и один вещественный отрицательный корень. Пусть $_1=\ \ +i\ \ ,\ _2=\ \ -i\ \ ,\ _3=\Delta$. Запишем теорему Виета для уравнения (3):

$$\begin{cases}\Delta+2\ \ =-a-2,\\ 2\Delta\ +\ ^2+\ ^2=a+\dfrac{}{a},\\ \Delta(\ ^2+\ ^2)=2(a-\ \ ),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=-a-2-2\ \ ,\\ 2\Delta\ +\ ^2+\ ^2=a+\dfrac{}{a},\\ \ ^2+\ ^2=\dfrac{2(a-\ \ )}{\Delta},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ ^2+\ ^2=\dfrac{2(a-\ \ )}{\Delta},\\ \Delta=-a-2-2\ \ ,\\ -2\ \ (a+2+2\ \ )-\dfrac{2(a-\ \ )}{a+2+2}=a+\dfrac{}{a}.\end{cases} \qquad (4)$$

Преобразовав последнее уравнение, получим кубическое уравнение относительно :

$$8\ ^3+(8a+16)\ ^2+\left(2a^2+10a+8+\frac{2}{a}\right)\ +\left(4a+a^2-\ \ +\frac{2}{a}\right)=0. \qquad (5)$$

В силу того, что параметры a и положительны, коэффициенты при первой, второй и третьей степенях в уравнении (5) положительны. Значит, это уравнение будет иметь вещественный положительный корень, если только свободный член отрицателен

$$4a+a^2-\ \ +\frac{2}{a}<0\Leftrightarrow\ \left(1-\frac{2}{a}\right)>4a+a^2. \qquad (6)$$

Чтобы последнее неравенство имело решение, необходимо, чтобы выполнялось условие $1-\frac{2}{a}>0$, откуда получаем, что $a>2$. При этом неравенство (6) эквивалентно следующему:

$$>\frac{4a^2+a^3}{a-2}$$

Из (5) следует, что

$$=\frac{-\left(4a+a^2-\ \ +\dfrac{2}{a}\right)-8\ ^3-(8a+16)\ ^2}{2a^2+10a+8+\dfrac{2}{a}}<\frac{-\left(4a+a^2-\ \ +\dfrac{2}{a}\right)}{2a^2+10a+8+\dfrac{2}{a}}.$$

Значит, параметр будет малым, если мала величина $\frac{(a-2)-4a^2-a^3}{2a^3+10a^2+8a+2}$. Из второго уравнения системы (4) следует, что $\Delta<0$, а из первого уравнения вытекает, что если выбрать достаточно малым, то выполняется условие $|\ \ |<<|\ \ |$.

Таким образом, в окрестности положения равновесия O_2 осуществляется переходный процесс от неустойчивого положения равновесия к устойчивому предельному циклу, если выполняются условия:

1) $a>2$;

2) $>\frac{4a^2+a^3}{a-2}$;

3) величина $\frac{(a-2)-4a^2-a^3}{2a^3+10a^2+8a+2}$ является малой.

В окрестности точки O_3 поведение системы практически такое же, как и в окрестности точки O_2

Другая модель была предложена Валлисом для описания нелинейных взаимодействий атмосферы, океана и пассатных ветров в экваториальной области Тихого океана. Эта модель является нелинейной, и описывается в общем случае неавтономной системой трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\ \ (\tilde{y}-\tilde{z})-b(\tilde{x}-f(t)),\\ \dot{\tilde{y}}=\tilde{x}\tilde{z}-\tilde{y}+c,\\ \dot{\tilde{z}}=-\tilde{x}\tilde{y}-\tilde{z}+c,\end{cases}$$

где $x(t)$ - скорость поверхностного течения в океане, $y(t)$ и $z(t)$ - температура воды на западной и восточной окраинах водного бассейна соответственно, $f(t)=a_0+a_1\sin 2t$ - периодическая функция, учитывающая влияние пассатных ветров. Рассмотрим эту систему при $f(t)\equiv 0$, приведя её таким образом к автономному виду:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \quad (\tilde{y}-\tilde{z})-b\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x}\tilde{z}-\tilde{y}+c, \\ \dot{\tilde{z}} = -\tilde{x}\tilde{y}-\tilde{z}+c. \end{cases} \qquad (7)$$

Эта система имеет три положения равновесия:

$$O_1(0,c,c),\ O_2\left(\sqrt{\frac{2c}{b}-1},\frac{b}{2}\left(\sqrt{\frac{2c}{b}-1}+1\right),\frac{b}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2c}{b}-1}\right)\right),$$

$$O_2\left(-\sqrt{\frac{2c}{b}-1},\frac{b}{2}\left(-\sqrt{\frac{2c}{b}-1}+1\right),\frac{b}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2c}{b}-1}\right)\right).$$

Рассмотрим сначала систему в окрестности положения равновесия O_1. Сделаем замену переменных:

$\tilde{x}=x,\ \tilde{y}=y+c,\ \tilde{z}=z+c.$

Тогда система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad (y-z)-bx, \\ \dot{y} = xz-y+cx, \\ \dot{z} = -xy-z-cx. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} -b- & & - \\ c & -1- & 0 \\ -c & 0 & -1- \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (\quad +1)(\ ^2+(b+1)\quad +b-2c\quad)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} {}_1=-1, \\ {}_{2,3}=\dfrac{-b-1\pm\sqrt{(b+1)^2-4(b-2c\quad)}}{2}. \end{array}\right.$$

Нас интересует случай, когда корни ${}_2$ и ${}_3$ комплексные, что выполняется при $D=(b-1)^2+8c\quad<0$. Положение равновесия O_1 будет неустойчивым, если $\mathrm{Re}\ {}_2>0$, то есть, $\dfrac{-b-1}{2}>0\Leftrightarrow b<-1$.

Таким образом, при выполнении условий

1) $b<-1$;

2) $(b-1)^2+8c\quad<0$;

3) $\quad=-\dfrac{b+1}{2}$ есть малая величина

будет осуществляться переход от положения неустойчивого равновесия к предельному циклу в окрестности точки O_1.

Рассмотрим поведение системы (7) в окрестности положения равновесия O_2. Сделаем замену переменных

$$\tilde{x}=x+\sqrt{\frac{2c}{b}-1},$$

$$\tilde{y}=y+\frac{b}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2c}{b}-1}\right),$$

$$\tilde{z}=z+\frac{b}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2c}{b}-1}\right).$$

В результате система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad (y-z)-bx, \\ \dot{y} = \dfrac{b}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right)\cdot x - y + \sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\cdot z + zx, \\ \dot{z} = -\dfrac{b}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right)\cdot x - \sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\cdot y - z - xy. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} -b- & & - \\ \dfrac{b}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right) & -1- & \sqrt{\dfrac{2c}{b}-1} \\ -\dfrac{b}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right) & -\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1} & -1- \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; {}^3+(b+2)\;{}^2+\left(\frac{2c}{b}+b\right)\; +4c\;\; -2b=0 \quad (8)$$

Для того чтобы положение равновесия было неустойчивым и реализовывался переход к устойчивому предельному циклу, достаточно, чтобы характеристическое уравнение (8) имело один вещественный корень $_1 = \Delta$ и два комплексных корня с малой положительной вещественной частью $_{2,3} = \;\pm i$, причём $|\Delta| >>$. По теореме Виета для кубического уравнения (8) получаем:

$$\begin{cases} 2\; +\Delta = -b-2, \\ 2\;\Delta + \;^2 + \;^2 = b+\dfrac{2c}{b}, \\ \Delta\left(\;^2+\;^2\right) = 2b-4c\;\;, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -b-2-2\;\;, \\ 2\;\Delta + \;^2 + \;^2 = b+\dfrac{2c}{b}, \\ \;^2 + \;^2 = \dfrac{2b-4c}{\Delta}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \;^2 + \;^2 = \dfrac{2b-4c}{\Delta}, \\ \Delta = -b-2-2\;\;, \\ -2\;\;(b+2+2\;\;)+\dfrac{4c\;\;-2b}{b+2+2} = b+\dfrac{2c}{b}. \end{cases}$$

Преобразовав последнее уравнение системы, получим кубическое уравнение относительно параметра :

$$8\;^3+(8b+16)\;^2+\left(2b^2+10b+8+\frac{4c}{b}\right)\; +\left(\frac{4c}{b}+b^2+4b-2c\;\;\right)=0.$$

Заметим, что при замене $2c\;\; \to \;$, $b \to a$ мы получим уравнение (5). Значит, для данной системы также существуют наборы параметров, при которых в системе осуществляется переход к устойчивому предельному режиму.

Список литературы

1. **Городецкий С. Е.** Управление параметрами динамической системы для реализации самоорганизующегося процесса перехода к устойчивому периодическому режиму: дис. … к.ф.-м.н. М., 2009.
2. **Vallis G. K.** A chaotic dynamical system // Science. 1986. V. 232. P. 243-245.
3. **Vallis G. K.** Conceptual models of El Nino // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. P. 13979-13991.

УДК 519.6

Валентина Михайловна Ипатова
Московский физико-технический институт

РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ НЕАВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

Аттракторы неавтономных диссипативных систем привлекают внимание специалистов различных областей знаний. Большая сложность многих практически важных математических моделей не позволяет найти их аттракторы в явном виде, поэтому для построения траекторий аттрактора обычно используются приближенные численные методы.