В результате система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad (y-z)-bx, \\ \dot{y} = \dfrac{b}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right)\cdot x - y + \sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\cdot z + zx, \\ \dot{z} = -\dfrac{b}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right)\cdot x - \sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\cdot y - z - xy. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} -b- & & - \\ \dfrac{b}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right) & -1- & \sqrt{\dfrac{2c}{b}-1} \\ -\dfrac{b}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1}\right) & -\sqrt{\dfrac{2c}{b}-1} & -1- \end{pmatrix} = 0 \iff {}^{3}+(b+2)\,{}^{2}+\left(\dfrac{2c}{b}+b\right)\quad +4c\quad -2b=0 \quad (8)$$

Для того чтобы положение равновесия было неустойчивым и реализовывался переход к устойчивому предельному циклу, достаточно, чтобы характеристическое уравнение (8) имело один вещественный корень ${}_{1}=\Delta$ и два комплексных корня с малой положительной вещественной частью ${}_{2,3}= \quad \pm i$, причём $|\Delta|>>$. По теореме Виета для кубического уравнения (8) получаем:

$$\begin{cases} 2 \quad +\Delta=-b-2, \\ 2\ \Delta+\ {}^{2}+\ {}^{2}=b+\dfrac{2c}{b}, \\ \Delta\left({}^{2}+\ {}^{2}\right)=2b-4c\quad , \end{cases} \iff \begin{cases} \Delta=-b-2-2\quad , \\ 2\ \Delta+\ {}^{2}+\ {}^{2}=b+\dfrac{2c}{b}, \\ {}^{2}+\ {}^{2}=\dfrac{2b-4c}{\Delta}, \end{cases} \iff \begin{cases} {}^{2}+\ {}^{2}=\dfrac{2b-4c}{\Delta}, \\ \Delta=-b-2-2\quad , \\ -2\quad(b+2+2\quad)+\dfrac{4c\quad-2b}{b+2+2}=b+\dfrac{2c}{b}. \end{cases}$$

Преобразовав последнее уравнение системы, получим кубическое уравнение относительно параметра :

$$8\ {}^{3}+(8b+16)\ {}^{2}+\left(2b^{2}+10b+8+\dfrac{4c}{b}\right)\quad+\left(\dfrac{4c}{b}+b^{2}+4b-2c\quad\right)=0.$$

Заметим, что при замене $2c\quad\to\quad, b\to a$ мы получим уравнение (5). Значит, для данной системы также существуют наборы параметров, при которых в системе осуществляется переход к устойчивому предельному режиму.

Список литературы

1. **Городецкий С. Е.** Управление параметрами динамической системы для реализации самоорганизующегося процесса перехода к устойчивому периодическому режиму: дис. … к.ф.-м.н. М., 2009.
2. **Vallis G. K.** A chaotic dynamical system // Science. 1986. V. 232. P. 243-245.
3. **Vallis G. K.** Conceptual models of El Nino // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. P. 13979-13991.

УДК 519.6

Валентина Михайловна Ипатова
Московский физико-технический институт

РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ НЕАВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

Аттракторы неавтономных диссипативных систем привлекают внимание специалистов различных областей знаний. Большая сложность многих практически важных математических моделей не позволяет найти их аттракторы в явном виде, поэтому для построения траекторий аттрактора обычно используются приближенные численные методы.

Динамическая модель заменяется разностной схемой, после чего происходит «разгонка модели» на длительный промежуток времени. Поскольку ошибки дискретизации модели накапливаются от шага к шагу, то за бесконечное время (в течение которого происходит притяжение к аттрактору) погрешность вычислений неизбежно должна стать бесконечно большой. В связи с этим представляет интерес проблема исследования существования аттракторов численных схем, которая в настоящей работе рассматривается на примере одного неавтономного ОДУ.

Вначале определим понятия семейств полупроцессов и их аттракторов, сохраняя стиль изложения, принятый в работах [1; 3].

Пусть E - полное метрическое пространство с метрикой $\mathrm{dist}_E(\cdot,\cdot)$; T - нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}$ вещественных чисел, $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap [0,+\infty)$ - полугруппа неотрицательных элементов из T. Например, $\mathcal{T}_+ = \mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$ для систем с непрерывным временем, $\mathcal{T}_+ = \mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ и $\mathcal{T}_+ = \mathbf{Z}_+ \ = \{0, \ ,2 \ ,\ldots\}$ где $\ >0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in \mathcal{T}_+, t \in \mathcal{T}_+, t \ge h$ на E определены непрерывные операторы $U(t,h): E \to E$ такие, что $U(t,s)U(s,h) = U(t,h), \quad \forall t,s,h \in \mathcal{T}_+ : t \ge s \ge h.$ Тройку $\{U, \mathcal{T}_+, E\}$ будем называть *полупроцессом*. Рассмотрим семейства операторов $U_f(t,h)$, функционально зависящие от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F - некоторое множество символов и каждому $f \in F$ поставлен в соответствие полупроцесс $\{U_f, \mathcal{T}_+, E\}$. Множество всех полупроцессов $\{U_f, \mathcal{T}_+, E\}$ таких, что $f \in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\{U_f, \mathcal{T}_+, E, F\}$.

Множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{U_f, \mathcal{T}_+, E, F\}$, если для любого ограниченного в E множества B имеет место равенство

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathcal{T}_+}} \sup_{f\in F} \mathrm{dist}_E(U_f(t,h)B, P) = 0, \quad \forall h \in \mathcal{T}_+,$$

где $\mathrm{dist}_E(X,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \mathrm{dist}_E(x,y)$.

Равномерным аттрактором семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором*. Достаточные условия существования аттрактора дает следующая

Теорема 1 [3]. *Если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор.*

Пусть функции $a^0(t)$, $b^0(t)$, $f^0(t)$ непрерывны на $T_+ = \mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$, причем существуют постоянные $\ $, $\ $, Σ такие, что

$$0 < \ \le a^0(t)\,,\ |b^0(t)| \le \ \ ,\ |f^0(t)| \le \Sigma \quad \forall t \ge 0\,. \tag{1}$$

Введем вектор $q^0(t) = (a^0(t), b^0(t), f^0(t))$, обозначим через $T(h)$, $h \ge 0$, операторы сдвига по времени, то есть $T(h) f^0(t) = f^0(t+h)$, и через

$$F = \bigcup\nolimits_{h\ge 0} T(h) q^0(t) = \bigcup\nolimits_{h\ge 0} q^0(t+h) \tag{2}$$

множество всех его неотрицательных сдвигов по времени вектора $q^0(t)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)\sin x^2 = f(t), \\ x|_{t=h} = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

где $h \ge 0$, $x \in E = \mathbf{R}$, $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$.

Из (1) - (2) следует, что для всех $q(t) \in F$ выполняются неравенства

$0 < \ \le a(t)$, $|b(t)| \le \ $, $|f(t)| \le \Sigma \quad \forall t \ge 0$.

Вектор $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$ является *символом*, то есть множеством всех зависящих от времени коэффициентов и членов в правой части уравнения (3). Решение задачи (3) будем записывать как $x(t) = U_q(t,h)x_0$, $t \ge h$. Тем самым заданы непрерывные операторы $U_q(t,h)$. Для каждого $q \in F$ определён *полупроцесс* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E\}$, где $\mathbf{R}_+ = T_+ = [0,+\infty)$ - область изменения переменной t, $E = \mathbf{R}$ - множество, которому принадлежат начальные состояния x_0. Объединение этих полупроцессов по всем $q \in F$ образует *семейство полупроцессов* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$, порождаемое задачей (3).

Теорема 2 [2]. *Семейство полупроцессов* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$, *порождаемое задачей (3), имеет аттрактор* A, *причём* $|x| \le r = G/ \quad \forall x \in A$, *где* $G = \Sigma + \ $.

Пусть $\ > 0$ - шаг сетки по времени, $t_k = k\ $, x_k - значение приближенного решения в момент $t = t_k$. Рассмотрим неявную конечно-разностную схему для отыскания приближенного решения задачи (3)

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\ } + a_k x_k + b_k \sin x_k^2 = f_k, \quad k = l+1, l+2, \dots, \tag{4}$$

где x_l задано, $q_k = (a_k, b_k, q_k) = q(t_k)$, $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$.

Умножая (4) на x_k и учитывая (1), имеем

$$\frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{2\ } + \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\ } + \ x_k^2 \le G|x_k| \le \frac{\ x_k^2}{2} + \frac{G^2}{2\ },$$

то есть

$$\frac{x_k^2 - x_{k-1}^2}{\ } + \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{\ } + \ x_k^2 \le \frac{G^2}{\ }, \tag{5}$$

из (5) вытекает неравенство есть $|x_k|^2 \le \frac{|x_{k-1}|^2}{1+\ } + r^2\left(1 - \frac{1}{1+\ }\right)$.

Используя индукцию по k, убеждаемся, что верна оценка

$$|x_k|^2 \le \frac{1}{(1+\ )^{k-l}}|x_l|^2 + \left(1 - \frac{1}{(1+\ )^{k-l}}\right)r^2, \quad k \ge l. \tag{6}$$

Схема (4) приводит к решению на каждом шаге по времени уравнения

$$x_k + \ a_k x_k + \ b_k \sin x_k^2 = x_{k-1} + \ f_k. \tag{7}$$

Возьмем $\ _0 > 0$ таким, что $\frac{1+\ _0}{3\ _0} \ge r$.

Теорема 3. *Уравнение (7) имеет решение при всех* $\ > 0$. *Если* $0 < \ \le \ _0$ *и*

$$|x_{k-1}| \le R\ = \frac{1+\ }{3\ }, \tag{8}$$

то решение единственно.

Доказательство. Обозначим $y = x_{k-1} + \ f_k$, $H(x) = x + \ a_k x + \ b_k \sin x^2 - y$. Полагая $x^1 = |y| + \ $, имеем $H(x^1) > 0$, $H(-x^1) < 0$. Следовательно, $H(x) = 0$ при некотором x. Пусть x, z - два решения (7). Для разности $u = z - x$ имеем

$$(1+\ a_k)u + 2\ b_k \sin\left(\frac{z^2 - x^2}{2}\right)\cos\left(\frac{z^2 + x^2}{2}\right) = 0,$$

следовательно,

$$(1+\ )|u| \le \ |u|(|x| + |z|). \tag{9}$$

Из (8) и (6) вытекает, что $|x| \le R\ $, $|z| \le R\ $. Неравенство (9) приводит к оценке $(1+\ -2\ R\ )|u| \le 0$. Поскольку $1+\ -2\ R\ > 0$, то $u = 0$. Теорема доказана.

На отрезке $E\ = [-R\ , R\ ]$ введем метрику, индуцированную из $\mathbf{R}$. В результате получим полное метрическое пространство. При $\ \le \ _0$ и $x_l \in E\ $ будем обозначать решение схемы (4) как $x^k = U_q(t_k, t_l)x^l$. Тем самым определены непрерывные операторы $U_q : E\ \to E\ $ и задано СПП $\{U_q, \mathbf{Z}_+\ , E\ , F\}$.

Теорема 4. *При всех шагах сетки* $\ \le \ _0$ *семейство полупроцессов* $\{U_q, \mathbf{Z}_+\ , E\ , F\}$*, порождаемое схемой (4), имеет равномерный аттрактор* $A\ $ *, причем*

$$|x| \le r \quad \forall x \in A\ . \tag{10}$$

Доказательство. Из (6) вытекает, что СПП $\{U_q, \mathbf{Z}_+\ , E\ , F\}$ имеет компактное равномерно притягивающее множество $P = [-r, r]$. По Теореме 1 указанное СПП имеет равномерный аттрактор, причем верно (10).

Список литературы

1. **Ипатова В. М.** Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. 1997. Т. 188. № 6. С. 47-56.
2. **Ипатова В. М.** Равномерный аттрактор неавтономного дифференциального уравнения // Альманах современной науки и образования. 2009. № 12. Ч. 1. С. 39-42.
3. **Chepyshov V. V., Vishik M. I.** Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. P. 279-333.