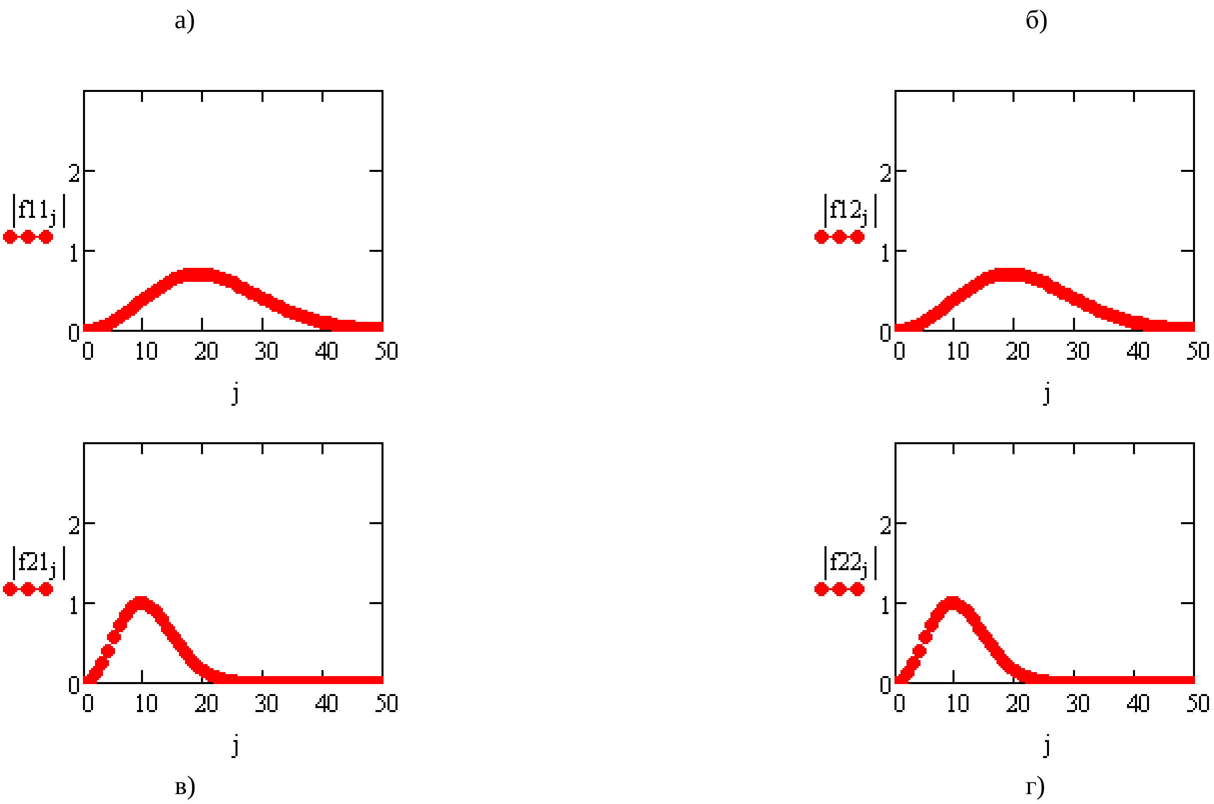

Рис. 6. *Графики модулей функций коэффициентов Фурье при: а) масштаб вейвлета a=1, и сдвига b=1; б) масштаб вейвлета a1, и сдвига b=2; в) масштаб вейвлета a=2, и сдвига b=1; г) масштаб вейвлета a=2, и сдвига b=2*

Из Табл. 3 видно, что Фурье-спектр вейвлета не зависит от величины b, а зависит только от величины a. С ростом a величина максимума Af возрастает, положение максимума jm уменьшается, ширина максимума Δj уменьшается.

Список литературы

1. **Гиляров В. Л.** Физика твердого тела. СПб., 2009. Т. 51. Вып. 10. 10 с.
2. **Дремин И. М.** Успехи физических наук. М., 2001. Т. 171. Вып. 5. 37 с.
3. **Макаров Е. Г.** Инженерные расчеты в *MathCAD 14*. СПб.: Питер, 2007.596 с.

УДК 517.984.5

Виктор Игнатьевич Филиппенко
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНДЕКСОМ ДЕФЕКТА (n,n) В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ©

Рассмотрим дифференциальное выражение

$l[y]=-y''(x)+Q(x)y(x),\ 0\le x<\infty$,

где $y(x)=(y_1(x),...,y_n(x))$ - n-мерная вектор-функция, $Q(x)$ - эрмитова матрица порядка n, элементы которой $q_{jk}(x)$ интегрируемы по Лебегу в каждом интервале $(0,b)$, $0<b<\infty$. Обозначим через $L_n^2(0,\infty)$ комплексное гильбертово пространство n - мерных вектор-функций, у которых сумма квадратов модулей компонент интегрируема по Лебегу на полуоси $(0,\infty)$, со скалярным произведением $(y,z)=\sum_{k=1}^{n} y_k(x)\overline{z}_k(x)dx$, а через M - минимальный замкнутый симметрический оператор, порождаемый в $L_n^2(0,\infty)$ выражением $l[y]$.

Рассуждая так же, как и в [2, § 17], можно показать, что:

1) область определения D^* оператора M^*, сопряженного M, состоит из вектор-функций $y \in L_n^2(0,\infty)$ с абсолютно непрерывной первой производной на каждом сегменте $[0,b],\ 0<b<\infty$, для которых $l[y]\in L_n^2(0,\infty)$;

2) если $y(x)=(y_1(x),...,y_n(x)),\ z(x)=(z_1(x),...,z_n(x))\in D^*$, то существует конечный предел

$$\lim_{x\to\infty}[y,z], \tag{1}$$

где $[y,z]=\sum_{k=1}^{n}\left(y_k(x)\overline{z}_k'(x)-y_k'(x)\overline{z}_k(x)\right)$;

3) область определения D оператора M состоит из тех вектор-функций $y\in D^*$, для которых $y(0)=y'(0)=0$, и предел (1) рамен нулю при каждом $z\in D^*$.

Обозначим через m_1 число линейно независимых решений из $L_n^2(0,\infty)$ уравнения

$$l[y]= \quad y \tag{2}$$

с комплексным параметром при $\mathrm{Im} \quad >0$, а через m_2 - число таких решений уравнения (2) при $\mathrm{Im} \quad <0$. Числа m_1 и m_2 совпадают с дефектными числами оператора M и сохраняют постоянные значения в полуплоскостях соответственно $\mathrm{Im} \quad >0$ и $\mathrm{Im} \quad <0$. Для m_1, m_2 справедливы неравенства $n\le m_1\le 2n,\ n\le m_2\le 2n$.

Согласно [1] числа m_1 и m_2 могут принимать независимо друг от друга любые значения от n до $2n-1$, а если одно из них равно $2n$, то другое также равно $2n$; последнее утверждение следует из того факта, что если все решения уравнения (2) при каком-нибудь комплексном значении $\quad = \quad_0$ принадлежат пространству $L_n^2(0,\infty)$, то и при любом комплексном все решения уравнения (2) принадлежат $L_n^2(0,\infty)$. Если все элементы матрицы Q - действительнозначные функции, то, очевидно, $m_1=m_2$.

Некоторые условия на матрицу Q, при которых M имеет индекс дефекта $\{\mathrm{n,n}\}$ и $\{\mathrm{2n,2n}\}$ можно найти в [4] (см. также [3]).

Развивая здесь, метод использованный в [5, теорема 10.6.1] для исследования скалярного уравнения, докажем следующую теорему.

1. Пусть $U_1(x, \quad)$ и $U_2(x, \quad)$ решения матричного уравнения (2), удовлетворяющие начальным условиям

$$U_1(0, \quad)=I,\ U_2(0, \quad)=0,\ U_1'(0, \quad)=0,\ U_2'(0, \quad)=I, \tag{3}$$

где I и 0 - единичная и нулевая матрицы порядка n. Матричные функции $U_1(x, \quad)$ и $U_2(x, \quad)$ составляют фундаментальную систему решений матричного уравнения (2) и являются целыми функциями параметра .

Известно, что если векторное уравнение (2) имеет n линейно независимых решений, принадлежащих $L_n^2(0,\infty)$, то в этом и только в этом случае существует единственная симметрическая матрица $B(\quad)$ такая, что все столбцы матрицы

$$\Psi(x, \quad)=U_1(x, \quad)B(\quad)+U_2(x, \quad) \tag{4}$$

принадлежат пространству $L_n^2(0,\infty)$ и $(\mathrm{Im} \quad)^{-1}\cdot \mathrm{Im}\,B(\quad)<0$, где $\mathrm{Im}\,B(\quad)=\dfrac{B(\quad)-B^*(\quad)}{2i}$.

Лемма. В верхней полуплоскости $B(\quad)$ является регулярной функцией параметра , причем $\overline{B}(\quad)=B(\overline{\quad})$.

Заметим сначала, что с помощью тождества Лагранжа

$$(l[y],z)-(y,l[z])=\frac{d}{dx}\left(\tilde{z}^*J\tilde{y}\right),$$

где $\tilde{y}=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ и равенств (3) - (4) легко проверяются равенства:

$U_1\ (x,\ \ )U_1'(x,\ \ )-\left(U_1'(x,\ \ )\right)\ U_1(x,\ \ )=0,$

$\Psi\ \ (x,\ \ )\Psi'(x,\ \ )-\left(\Psi'(x,\ \ )\right)\ \Psi(x,\ \ )=0,$

$U_1\ (x,\ \ )\Psi'(x,\ \ )-\left(U_1'(x,\ \ )\right)\ \Psi(x,\ \ )=I,$

$\Psi\ \ (x,\ \ )U_1'(x,\ \ )-\left(\Psi'(x,\ \ )\right)\ U_1(x,\ \ )=-I,$

где - операция перехода к транспонированной матрице.

2. Пусть N_i и N_{-i} - дефектные подпространства оператора M. Столбцы матриц $\Psi(x,\pm i)$ принадлежат $L_n^2(0,\infty)$ и являются линейно независимыми решениями уравнений $l[y]=\pm iy$. Следовательно, $\left\{\Psi(x,i)e_k\right\}_1^n$ и $\left\{\Psi(x,-i)e_k\right\}_1^n$, где e_k - вектор, все компоненты которого кроме k -ой равны нулю, а k -ая компонента равна единице, составляют пространств N_i и N_{-i} соответственно.

Пусть, далее $F(\ \ )$ - произвольная регулярная в верхней полуплоскости операторная функция комплексного параметра , значения которой являются линейные операторы, действующие из дефектного пространства N_i в пространство N_{-i} и по норме не превосходящие единицы. Обозначим через $\ \ =\left(\ \ _{jk}(\ \ )\right)_1^n$ матрицу, соответствующую в базисах $\left\{\Psi(x,i)e_k\right\}_1^n$ и $\left\{\Psi(x,-i)e_k\right\}_1^n$ оператору $F(\ \ )$ так, что

$$F(\ \ )\left[\Psi(x,-i)e_k\right]=\sum_{j=1}^{n}\ \ _{jk}(\ \ )\Psi(x,i)e_j\ .$$

Обозначим M_F - квазисамосопряженное расширение оператора M, определяемое оператором F. Известно, что область определения $D(\mathrm{M}_F)$ оператора M_F состоит из множества функций $y(x)$ из $L_n^2(0,\infty)$, удовлетворяющих условию

$$\Phi^*(x)J\tilde{y}(x)\Big|_0^\infty=0\,, \tag{5}$$

где

$$\Phi(x)=\tilde{\Psi}(x,-i)\ \ ^*-\tilde{\Psi}(x,i)\,. \tag{6}$$

Если индекс дефекта оператора M равен (n,n), то для любого $h\in R^n$

$\lim\limits_{x\to\infty}h^*\Phi^*(x)\tilde{J}(x)\tilde{y}(x)=0$ и условие (5) заменится условием

$$\Phi^*(x)\tilde{J}\tilde{y}(x)\Big|_0=0\,. \tag{7}$$

Отсюда и из равенств (3)-(4) следует, что область определения оператора $\mathrm{M}_{F(\ )}$ состоит из всех тех вектор-функций $y(x)\in L_n^2(0,\infty)$, которые удовлетворяют условию

$A_1(\ \ )y(0)+A_2(\ \ )y'(0)=0\,,$

где

$$A_1(\ \ )=\ \ (\ \ )-I,\ A_2(\ \ )=B(-i)-\ \ (\ \ )B(i)\,. \tag{8}$$

Отметим некоторые свойства матричных функций $A_1(\ \ )$ и $A_2(\ \ )$.

1) $A_1(\ \ )$ и $A_2(\ \ )$ регулярные в верхней полуплоскости функции .

2) $\dfrac{1}{2i}\left(A_2(\ \ )A_1^*(\ \ )-A_1(\ \ )A_2^*(\ \ )\right)\le 0$ при любом из верхней полуплоскости.

3) Ранг матрицы $\left(A_1(\ \ )A_2(\ \ )\right)$ равен n при любом невещественном .

Теперь можно построить формулу обобщенных резольвент оператора M. Как известно, для любой функции $f(x)\in L_n^2(0,\infty)$ $R\ \ f$ является решением уравнения

$$l[y]-\ \ y=f \tag{9}$$

и принадлежит $D\left(\mathrm{M}_{F(\ )}\right)$.

Решая методом вариации произвольных постоянных уравнение (9), в правой части которого находится произвольная финитная функция $f(x)$ из $L_n^2(0,\infty)$. Принимая во внимание, что $y=R\ \ f$ принадлежит области определения оператора $\mathrm{M}_{F(\ )}$, получим

$$\left(R\ f\right)(x)=U\left(x,\ \right)\Phi\left(\ \right)\ \ \left(f,\ \right)-U_1\left(x,\ \right)\int_x^\infty U_2\left(s,\ \right)f\left(s\right)ds-U_2\left(x,\ \right)\int_0^x U_1\left(s,\ \right)f\left(s\right)ds\ , \qquad (10)$$

где $U\left(x,\ \right)=\left(U_1\left(x,\ \right)U_2\left(x,\ \right)\right)$; $\left(f,\ \right)=\int_0^\infty U\ \left(s,\ \right)f\left(s\right)ds$;

$$\Phi\left(\ \right)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}\left(\ \right) & \Phi_{12}\left(\ \right)\\ \Phi_{21}\left(\ \right) & \Phi_{22}\left(\ \right)\end{pmatrix};$$

$$\Phi_{11}\left(\ \right)=-B\left(\ \right)\left(A_1\left(\ \right)B\left(\ \right)+A_2\left(\ \right)\right)^{-1}A_2\left(\ \right),\ \Phi_{12}\left(\ \right)=B\left(\ \right)\left(A_1\left(\ \right)B\left(\ \right)+A_2\left(\ \right)\right)^{-1}A_1\left(\ \right),$$
$$\Phi_{21}\left(\ \right)=\left(A_1\left(\ \right)B\left(\ \right)+A_2\left(\ \right)\right)^{-1}A_1\left(\ \right)B\left(\ \right),\quad \Phi_{22}\left(\ \right)=\left(A_1\left(\ \right)B\left(\ \right)+A_2\left(\ \right)\right)^{-1}A_1\left(\ \right). \qquad (11)$$

Из условия $R^*=R_-$ можно получить формулу для значений из другой полуплоскости:

$$\left(R_-f\right)(x)=U\left(x,\bar{\ }\right)\Phi^*\left(\ \right)\ \ \left(f,\bar{\ }\right)-U_1\left(x,\bar{\ }\right)\int_x^\infty U_2\left(s,\bar{\ }\right)f\left(s\right)ds-U_2\left(x,\bar{\ }\right)\int_0^x U_1\left(s,\bar{\ }\right)f\left(s\right)ds\,. \qquad (12)$$

Принимая во внимание ограниченность R можно показать, что эти формулы верны для любой функции $f\left(x\right)\in L_n^2\left(0,\infty\right)$. Таким образом имеет место следующая

Теорема. Совокупность всех обобщенных резольвент оператора M с индексом дефекта $\left(n,n\right)$ определяется формулами (10)-(12), где матричные функции $A_1\left(\ \right)$ и $A_2\left(\ \right)$ обладают свойствами 1)-3).

Список литературы

1. **Лидский В. Б.** О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $-y''+P\left(t\right)y=\ \ y$ // ДАН СССР. 1954. Т. 95. № 2. С. 217-220.
2. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
3. **Фетисов В. Г., Филиппенко В. И.** Исследования по теории операторов и их приложениям. Шахты: Издательство ЮРГУЭС, 2008. 185 с.
4. **Филиппенко В. И.** Линейные квазидифференциальные операторы в гильбертовом пространстве // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2006. С. 293-344.
5. **Хатсон В., Пим Дж. С.** Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. 432 с.