**Заключение**

Развитие портативной техники требует дальнейшего уменьшения энергопотребления и повышения качества изображения. Каждая из описанных технологий обладает определенными преимуществами и недостатками. С большой долей вероятности можно предположить, что рынок портативной, автомобильной и охранной техники со временем останется за КМОП-датчиками так как сенсоры на базе ПЗС-структур лучше использовать в камерах высокого разрешения и чувствительности. Среди всех производителей КМОП-сенсоров наиболее широкой программой поставок выделяется компания Micron Technology, выпускающая датчики как для коммерческого рынка, так и для специальной техники, а наличие инструментов для создания готового изделия с минимальными затратами делает продукцию этой компании перспективной и привлекательной.

*Список литературы*

1. **Бирюков Е.** Эволюция датчиков изображения: от ПЗС к КМОП // Компоненты и технологии. 2007. № 10. С. 56-59.
2. **Зырянов М.** Электронная «Фотопленка» // Publish. 2001. № 1. С. 29-31.
3. **Шевердин А.** Технологические инновации КМОП-камер Omnivision - оптимальный выбор для высокообъемных применений // Компоненты и технологии. 2008. №1. С. 46-49.
4. **http://hamamatsu.su/Photodiode%20Arrays%20with%20Amplifiers.htm.**

---

УДК 517.9

*Петр Игнатьевич Совертков*
*Сургутский государственный университет*

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ МОТИВАЦИИ ПОИСКА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ©

Поиск функциональной зависимости является одним из основных моментов в исследовательской деятельности по математике.

Основными этапами для обнаружения функциональной зависимости являются: анализ нескольких объектов и отношений между объектами, выявление некоторой зависимости на определенной группе объектов, формулировка гипотезы, проверка зависимости на более широком классе объектов, попытка построения контрпримеров, доказательство гипотезы.

Следует различать формирование навыков поиска функциональной зависимости посредством обучения выстраиванию этапов поиска закономерностей и деятельность учащегося, направленную на выявление закономерности в исследовании, посредством применения сформированных ранее навыков.

Существует психологический разрыв между тем, когда субъекта обучают навыкам, а значит ориентацией на то, что нужно увидеть в предложенном исследовании, и той ситуацией, когда же нужно увидеть необходимость обращения внимания на ту группу объектов, в которой потом может обнаружиться функциональная зависимость.

Учитывая, что человек получает большую часть информации визуально и мозг позволяет усваивать и перерабатывать громадное количество информации за мгновенный зрительный акт, нужно использовать этот акт визуального наблюдения для устранения этого психологического разрыва, т.е. для формирования мотивации.

Для этого лучше использовать геометрические задачи, т.к. они в большей степени выступают раздражителями нашего внимания, магическим воздействием переплетения линий следования по рисунку, приглашением к исследованию.

Рассмотрим задачу о построении фигуры, изображенной на Рис. 1. Дан квадрат $ABCD$ со стороной $a$. Каждая сторона квадрата делится на две равные части. На полученных отрезках строятся квадраты во внешнюю сторону от данного квадрата и строятся квадраты в угловых точках. Вокруг данного квадрата получилось первое кольцо из квадратов со сторонами $a/2$.

Далее стороны квадратов снова делятся пополам, и повторяется процесс построения квадратов.

В чем же существенная разница между различными взглядами двух учащихся на одну и туже геометрическую фигуру на Рис.1, один из которых проявляет интерес к геометрической фигуре и желает ее построить геометрическими инструментами, и вторым, который хочет воспроизвести этот рисунок с помощью компьютера.

Для первого учащегося вопрос о построении фигуры решается просто. Строим квадрат $ABCD$ со стороной $a$. Продолжаем стороны квадрата.

---

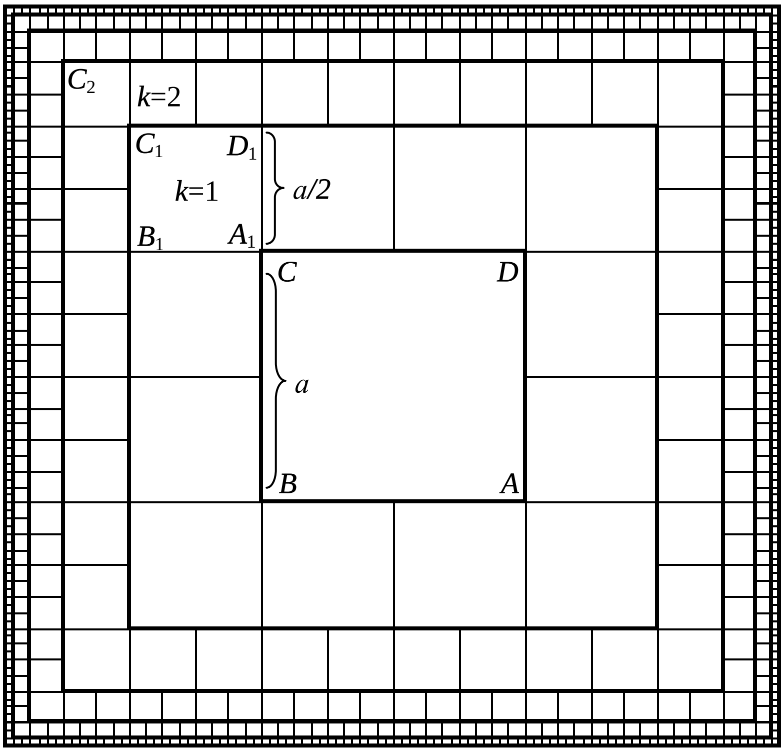


**Рис. 1**

Одну сторону квадрата делим на две равные части. Во внешнюю сторону от данного квадрата строим квадраты со сторонами, равными $a/2$. Обращаем внимание на то, что все стороны первоначального квадрата не обязательно делить пополам, т.к. на каждой из сторон легко найти середину, отложением отрезка, равного $a/2$.

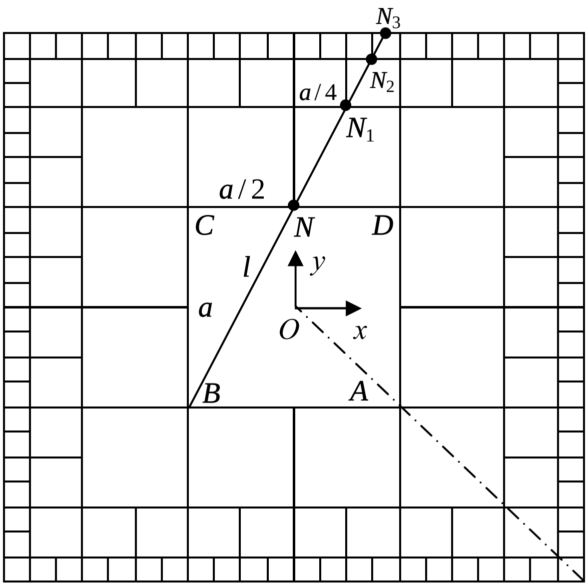


**Рис. 2**

Вокруг данного квадрата получилось первое кольцо из квадратов со сторонами $a/2$. Далее процесс повторяется аналогично.

Фраза "Далее процесс повторяется аналогично" часто обрывает исследование. Действительно, есть ли необходимость каждый раз делить сторону на две равные части при переходе к новому кольцу окаймляющих квадратов? Для геометрического построения середины отрезка с помощью циркуля и линейки нужно осуществить в этом случае несколько операций. Можно ли каким-то дополнительным построением автоматизировать получение длины квадрата для следующего кольца квадратов.

Анализ длин $a$, $a/2$, $a/4$ показывает, что их длины пропорционально уменьшаются, т.е. из них можно образовать пропорцию $a : a/2 = a/2 : a/4$, а, значит нужно искать дополнительное построение, выявляющее подобные треугольники с такими элементами.

Если провести (Рис. 2) прямую $l$, проходящую через вершину $B$ квадрата и середину $N$ стороны $CD$ квадрата, то эта прямая в пересечении со сторонами квадратов каждого следующего ряда определяет середины отрезков $N_1, N_2, N_3, \ldots$, т.к. легко заметить серию подобных треугольников. Таким образом, достаточно только один раз разделить отрезок $CD$ пополам, потом провести прямую $BN$ и строить необходимые квадраты.

Компьютерное построение данной фигуры возможно несколькими способами.

Первый способ - построение квадратов с помощью примитивов, т.е. основных фигур в текстовом редакторе. Прикладывание равных фигур и построение квадрата, стороны которого в два раза меньше, чем стороны исходного квадрата, являются приблизительными методами и, кстати, также требуют большого времени. Поэтому рассмотрим построение фигуры с помощью компьютерного моделирования.

Построение фигуры с помощью компьютерной программы требует перевода сформулированной геометрической задачи на алгебраический язык.

Будем предполагать, что начало декартовой системы координат совпадает с центром первоначального квадрата, а оси координат параллельны сторонам квадрата.

Для построения всей фигуры необходимо выделить два принципиальных этапа.

Первый этап - как построить квадраты в одном кольце, т.е. в двух горизонтальных и двух вертикальных рядах?

Второй этап - как перейти на нового кольцо, чтобы повторить предыдущие построения на компьютере?

Конечно, существует нулевой этап по построению первоначального квадрата, но он является тривиальным построением квадрата с помощью одного оператора, хотя и требует определения координат двумя противоположных вершин $C(-a/2; a/2),\ A(a/2; -a/2)$.

Построение квадратов на компьютере в горизонтальном ряду можно осуществить с помощью цикла, изменяя все координаты по оси абсцисс на одно и тоже число, т.е. добавлением числа, равного длине стороны квадрата. Но для этого необходимо знать сколько раз нужно выполнить изменение координат, т.е. сколько квадратов умещается в горизонтальный ряд. Очевидно, что это число зависит от номера кольца окаймляющих квадратов.

Итак, компьютерное моделирование создало мотивацию к выявлению зависимости числа квадратов в горизонтальном ряду.

Такой вопрос мог задать любознательный учащийся и при ручном построении квадратов, но при компьютерном моделировании этот мотив возникает естественным образом в силу необходимости. При компьютерном моделировании, в большинстве случаев, возникает несколько мотивов по определению различных функциональных зависимостей, причем в решаемой задаче они осознаются как необходимые, а не кем-то изначально определенные. Необходимость решить возникшую проблему активизирует методы поиска решения возникшей проблемы.

Ради справедливости следует заметить, что ручное построение фигуры не требует аналитического математического моделирования. Оно значительно проще по формированию алгоритма построения, но зато является рутинным и после построения двух колец окаймляющих квадратов вообще отбивает желание продолжать далее построения. Оно не отличается как точностью, так и мобильностью, т.к. при незначительном изменении условий задачи вся процедура построений должна быть повторена снова.

Построение такой фигуры лучше осуществить с помощью компьютерной программы по следующей причине. При изменении длины стороны данного квадрата, изменении числа колец из окаймляющих квадратов, выделении раскраски определенных квадратов или выделении контура группы квадратов можно быстро изменять рисунок.

Рассмотрим построение верхнего горизонтального ряда окаймляющих квадратов на шаге с номером $k$. Построение можно выполнить с помощью цикла, указав координаты двух противоположных вершин самого левого квадрата в этом ряду и затем последовательно выстраивая квадраты в ряд.

Определим число квадратов в горизонтальном ряду. Над каждым квадратом предыдущего ряда строится два квадрата и по углам добавляется по квадрату, поэтому получаем рекуррентную формулу для числа квадратов $b_k = 2b_{k-1} + 2$, где $k \geq 1$, $b_0 = 1$ и числовую последовательность: 1, 4, 10, 22, 46, … Эта последовательность имеет признаки геометрической прогрессии, т.к. происходит удвоение предыдущего члена последовательности и имеет также признаки арифметической последовательности, т.к. каждый член последовательности затем увеличивается на 2, но в целом эта последовательность отличается от известных ранее последовательностей в школьном курсе математики.

Компьютер может вычислять члены этой последовательности по рекуррентной формуле, но представляет интерес найти явное выражение произвольного члена последовательности.

$b_1 = 4 = 2^2$, $b_2 = 2b_1 + 2 = 2^3 + 2$,

$b_3 = 2b_2 + 2 = 2(2^3 + 2) + 2 = 2^4 + 2^2 + 2$,

$b_4 = 2b_4 + 2 = 2(2^4 + 2^2 + 2) = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2$, …

$b_k = 2^{k+1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} .. + 2^2 + 2$.

Сумма членов геометрической прогрессии $2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}..+2^2+2$ равна $2^k-2$. Следовательно $b_k=2^{k+1}+2^k-2$ или $b_k=3\cdot 2^k-2$.

Рассмотрим другой способ определения числа $b_k$. Длина ряда квадратов с номером *k* равна

$$d_k=a+2\frac{a}{2}+2\frac{a}{4}+\ldots+2\frac{a}{2^k}=a\frac{2^k+2^{k-1}-1}{2^{k-1}}.$$

Разделив длину ряда на длину квадрата $a/2^k$ в этом ряду, получим искомое число $b_k=3\cdot 2^k-2$.

Познакомимся с новым, третьим способом определения чисел $b_k$ с помощью производящей функции, используя методы символьной математики.

Запишем рекуррентное соотношение для $b_k$ в виде $b_k-2b_{k-1}-2=0$.

Рассмотрим выражения

$$f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_kx^k+\ldots \qquad (1)$$

$$xf(x)=b_0x+b_1x^2+b_2x^3+\ldots+b_{k-1}x^k+\ldots$$

В символьной математике часто используют выражение

$$\frac{1}{1-bx}=1+bx+(bx)^2+\ldots+(bx)^k+\ldots, \qquad (2)$$

которое очевидно из определения суммы геометрической прогрессии для знаменателя *bx*, удовлетворяющего условию $|bx|<1$.

Составим выражение

$$f(x)-2x\,f(x)-\frac{2}{1-x}=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_kx^k+\ldots$$

$$-2\left(b_0x+b_1x^2+b_2x^3+\ldots+b_{k-1}x^k+..\right)-2\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots\right).$$

$$f(x)-2x\,f(x)-\frac{2}{1-x}=$$

$$=b_0-2+(b_1-2b_0-2)x+(b_2-2b_1-2)x^2+\ldots+(b_k-2b_{k-1}-2)x^k+\ldots$$

Учитывая равенства $b_k-2b_{k-1}-2=0$ для $k\geq 1$ и $b_0=1$, получаем

$$f(x)(1-2x)=\frac{2}{1-x}-1=\frac{1+x}{1-x},\quad f(x)=\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Представим дробь $\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}$ в виде суммы более простых дробей вида (2):

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x},\ 1+x=A(1-2x)+B(1-x).$$

Подставляя значение $x=1$, получаем $A=-2$.

Подставляя значение $x=1/2$, получаем $B=3$.

Поэтому $\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{3}{1-2x}-\frac{2}{1-x}$, $f(x)=\frac{3}{1-2x}-\frac{2}{1-x}$.

Используя выражение (2), получим

$$f(x)=3\left(1+2x+2^2x^2+\ldots+2^kx^k+\ldots\right)-2\left(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots\right)$$

$$f(x)=1+(3\cdot 2^2-2)x+(3\cdot 2^2-2)x^2+\ldots+(3\cdot 2^k-2)x^k+\ldots \qquad (3)$$

Сравнивая коэффициенты в выражениях (1) и (3) при $x^k$, получаем

$b_k=3\cdot 2^k-2$

Этот способ, конечно, является более сложным, но он является универсальным для получения большого количества формул в комбинаторике и в дискретной математике при переходе от рекуррентной формулы к явному заданию.

Число окаймляющих квадратов $c_k$ можно получить, умножая число квадратов в одно ряду на четыре и вычитая число угловых квадратов, т.к. они подсчитаны дважды, т.е. $c_k=4b_k-4$.

Число квадратов в ряду с номером *k* равно $c_k=12(2^k-1)$, где $k\geq 1$.

В следующей компьютерной программе, написанной на языке Visual Basic 6.0, приняты обозначения:

- $(xl;yv)$ - координаты левого верхнего угла квадрата в ряду с номером *k* и расположенного слева;
- $(xp;yn)$ - координаты правого нижнего угла квадрата;
- *ak* - длина стороны квадрата в этом ряду.

```
Private Sub Command1_Click()
Form1.Scale (0, Form1.Height)-(Form1.Width, 0)
xc = 5000: yc = 4000: a = 2000: ak = a / 2: xl = -a / 2: xp = a / 2: yv = -xl: yn = -xp
Line (xl + xc, yv + yc)-(xp + xc, yn + yc), , B
For k = 1 To 5
bk = 3*2 ^ k - 2: xl = xl - ak: yv = -xl: yn = xl: xp = -xl
For i = 1 To bk
Line (xl + (i - 1) * ak + xc, yv + yc)-(xl + i * ak + xc, yv - ak + yc), , B
Line (xl + (i - 1) * ak + xc, yn + yc)-(xl + i * ak + xc, yn + ak + yc), , B
Line (xl + xc, yv - (i - 1) * ak + yc)-(xl + ak + xc, yv - i * ak + yc), , B
Line (xp + xc, yv - (i - 1) * ak + yc)-(xp - ak + xc, yv - i * ak + yc), , B
```

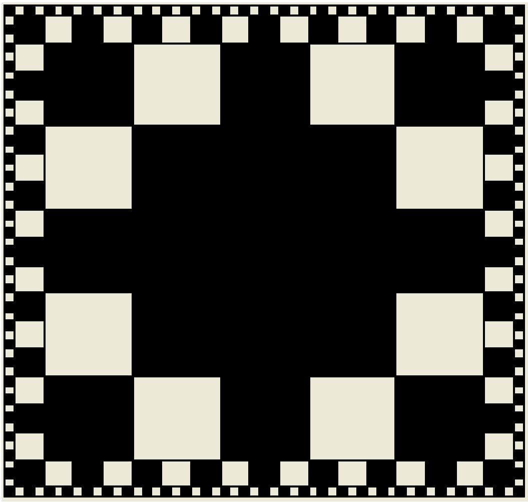

**Рис. 3**

```
Next i
Line (xl + xc, yv + yc)-(-xl + xc, -yv + yc), , B
ak = ak / 2: Next k
End Sub
```

Проведенное математическое моделирование, ориентированное под потребности компьютерного моделирования, содержит несколько вариантов только для определения числа $b_k$ квадратов в горизонтальном ряду. При разработке компьютерной программы также можно предложить несколько вариантов организации цикла для построения квадратов в ряд, а затем несколько вариантов для организации двойного цикла, т.е. цикла в цикле при переходе на следующее кольцо. Использование компьютера расширяет возможности для генерирования идей по решению одной задачи различными методами. Методы генерирования идей и другие направления использования компьютера для формирования исследовательской деятельности учащихся по математике и информатике приведены в пособии [1].

На Рис. 3 сторона квадрата, равная $a$, делится на 3 равные части и далее строятся окаймляющие квадраты. Определите число $b_k$ квадратов в каждом ряду с номером $k$ и число $c_k$ квадратов в каждом кольце, а также напишите компьютерную программу построения этой фигуры. Определите площадь всей фигуры при возрастании номера $k$, определите число квадратов черного цвета и число квадратов белого цвета в кольце с номером $k$ и определите отношение суммы площадей квадратов черного цвета к сумме площадей квадратов белого цвета (Ответ: $b_k = 2 \cdot 3^k - 1$).

Подводя итоги, можно констатировать, что:

- геометрические рисунки с заложенными идеями функциональной зависимости создают мотив для самостоятельного определения этих зависимостей;
- воспроизведение этих рисунков на компьютере расширяет спектр поиска зависимостей;
- использование математического и компьютерного моделирования позволяет создать изящный рисунок, который можно быстро изменять в зависимости от параметров.

*Список литературы*

1. **Совертков П. И., Назин А. Г.** Моделирование в интегративном проекте по математике и информатике: элективный курс: в 3-х ч. М.: Бином; Лаборатория знаний (в печати).