Таким образом, благодаря введению *подвижной* ячейки (Рис. 4), открываются новые перспективы для проектирования различных механизмов и машин, которые могут быть использованы в системах автоматики и управления, робототехнике, на транспорте и др.

Список литературы

1. **Буль Б. К., Буткевич Г.В. и др.** Основы теории электрических аппаратов. М.: Высшая школа, 1970. 600 с.

УДК 517.9

Виктор Игнатьевич Филиппенко
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ©

В работе исследуется спектр линейного несамосопряженного оператора, порожденного обыкновенной дифференциальной операцией второго порядка и краевым условием, зависящим от спектрального параметра.

1. Пусть $T:L_n^2\left(R^+\right)\to L_n^2\left(R^+\right)$ - замкнутый оператор, порожденный обыкновенной дифференциальной операцией второго порядка

$$\tau[y]=-\frac{d^2y}{dx^2}+Ay+A_0(x)y \tag{1}$$

и краевым условием

$$B_0(\lambda)y(0)+B_1(\lambda)y'(0)=0 \tag{2}$$

где $y(x)=\left(y_1(x),...,y_n(x)\right)$ - вектор-столбец, A - постоянная $(n\times n)$ - матрица с элементами a_{ij}, A_0, B_0 и B_1 - переменные матрицы той же размерности. Используем следующие обозначения: $R^+=\{x:0\le x\le +\infty\}, C(\lambda)$ - комплексная плоскость, I - единичная матрица, $\|y\|=\max\limits_j\left|y_j\right|, \|A\|=\max\limits_j\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_{jk}\right|, \mu_j(A)$ - собственные значения матрицы $A, \sigma(T)$ - спектр оператора T. В пространстве $L_n^2\left(R^+\right)$ норма вводится следующим образом: $\|y(x)\|_{L_n^2}^2=\int\limits_0^\infty\|y(x)\|^2dx$. Она эквивалентна обычной норме $\|y(x)\|_{L_n^2}^2=\int\limits_0^\infty\sum\limits_{j=1}^{n}\left|y_j(x)\right|^2dx$.

Обозначим через D - область определения оператора T. Она состоит из вектор-функций, которые удовлетворяют следующим условиям: $y\in L_n^2\left(R^+\right), y'(x)$ абсолютно непрерывна в каждом конечном отрезке $[0,a]\subset R^+, y(x)$ удовлетворяет краевому условию (2).

Спектр задачи (1-2), когда $A_0(x)$ финитная матрица-функция и B_0, B_1 не зависят от спектрального параметра λ, детально изучен М. Ф. Федорюком [1].

Следуя А. В. Штраусу [2], предположим, что матрицы-функции $B_0(\lambda), B_1(\lambda)$, зависящие от спектрального параметра λ, удовлетворяют следующим условиям:

a) ранг прямоугольной матрицы $\left(B_0(\lambda)B_1(\lambda)\right)$ равен n при любом λ;

b) $B_0(\lambda), B_1(\lambda)$ - целые матричные функции параметра λ.

2. Предположим, что $A_0(x)=0$.

Теорема 1. Оператор T имеет не более чем счетное множество изолированных собственных значений, а его непрерывный спектр состоит из лучей $\Gamma_j=\left\{\lambda:\operatorname{Re}\mu_j(A)\le\operatorname{Re}\lambda<\infty, \operatorname{Im}\lambda=\operatorname{Im}\mu_j(A)\right\}, 1\le j\le n$.

Доказательство. Обозначим через $C_A(\lambda)$ - комплексную плоскость λ с разрезом по лучам Γ_j и выберем ветви функции $\sqrt{\mu_j(A)-\lambda}$ так, чтобы

$$\operatorname{Re}\sqrt{\mu_j(A)-\lambda}>0, \lambda\in C_A(\lambda) \tag{3}$$

Пусть $\sqrt{A-\lambda I}$ - та ветвь корня, для собственных значений которой выполняется условие (3). Тогда всякая собственная функция оператора T имеет вид $y=\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)f$, где $f\neq 0$ - постоянный вектор, так что собственное значение λ определяется из уравнения $\det\left(B_0(\lambda)-B_1(\lambda)\sqrt{A-\lambda I}\right)=0$.

Из условий a) и b) следует, что это уравнение имеет не более чем счетное множество решений.

Предположим, что $\lambda\in\Gamma_j$ и не является собственным значением матрицы A, $\mu_j(A)$ - простое собственное значение матрицы A и на луче Γ_j не лежат μ_k, если $k\neq j$. Обозначим через $\sqrt{A-\lambda I}$ ветвь корня с собственными значениями $\sqrt{\mu_k(A)-\lambda}$, где ветви выбраны в соответствии с (3) и $\sqrt{\mu_j(A)-\lambda}=i\left|\sqrt{\mu_j(A)-\lambda}\right|=i\alpha$.

Пусть $Af=\mu_j(A)f, f\neq 0$. Тогда всякое ограниченное на промежутке $[0,\infty)$ решение уравнения $\tau[y]=\lambda y$ имеет вид $y_0(x,\lambda)=ce^{i\alpha x}f+\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)g$, где c - константа, g - постоянный вектор. Подставляя $y_0(x,\lambda)$ в (2), получим систему уравнений для неизвестных c и g. Так как система однородна, число уравнений равно n, а число неизвестных равно $n+1$, то система имеет нетривиальное решение. Теперь по $y_0(x,\lambda)$ можно построить последовательность почти собственных функций $\{y_k(x,\lambda)\}$ оператора T, отвечающих $\lambda\in\Gamma_j-\mu_j(A)$. Таким образом, λ принадлежит непрерывному спектру оператора T.

3. Прежде чем переходить к рассмотрению случая $A_0(x)\neq 0$, рассмотрим асимптотическое поведение решений уравнения $\tau[y]=\lambda y$. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\phi(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_0^\infty K(x,\xi,\lambda)\phi(\xi,\lambda)d\xi \tag{4}$$

где f,ϕ - векторы, $K(x,\xi,\lambda)$ - матрица.

Пусть ядро системы (4) $K(x,\xi,\lambda)$ удовлетворяет условиям:

1. Для каждого значения λ, принадлежащего некоторому множеству S комплексной плоскости $C(\lambda)$, и для каждого $x\in R^+$ $K(x,\xi,\lambda)$ есть измеримая суммируемая функция переменного ξ в промежутке $[0,\infty)$.

2. Существует число $0<q<1$ такое, что $\int_0^\infty\|K\|d\xi<q$, если $x\in[0,\infty)$ и $\lambda\in S$.

3. Для каждой точки $x_0\in[0,\infty)$ и каждого $\lambda_0\in S$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ \lambda\to\lambda_0}}\int_0^\infty\left\|K(x,\xi,\lambda)-K(x_0,\xi,\lambda_0)\right\|d\xi=0$.

4. Вектор-функция $f(x,\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям: a) она непрерывна по совокупности переменных x и λ; b) ограничена на множестве $[0,\infty)\times S$.

Лемма 1. Если выполняются условия 1–4, то уравнение (4) имеет решение $\phi(x,\lambda)$, непрерывное по совокупности переменных x и λ, которое, кроме того, ограничено на множестве $[0,\infty)\times S$.

В справедливости этой леммы, как и в одномерном случае, можно убедиться с помощью метода последовательных приближений.

Лемма 2. Пусть в дополнение к условиям 1–4 выполняются условия:

1. S - открытое множество комплексной плоскости $C(\lambda)$.

2. Для каждого фиксированного значения x из промежутка $[0,\infty)$ f есть голоморфная функция переменного $\lambda\in S$.

3. Для каждого фиксированного значения $x\in[0,\infty)$ интеграл $\int_0^\infty Kfd\xi$ есть голоморфная вектор-функция переменного $\lambda,\lambda\in S$.

Тогда для любого фиксированного значения $x\in[0,\infty)$ решение $\phi(x,\lambda)$ уравнения (4) есть голоморфная функция переменного λ в области S.

4. Предположим, что $A_0(x)\in L_n^1(R^+)$ и рассмотрим асимптотику решений уравнения $\tau[y]=\lambda y$. Для этого перейдем к рассмотрению матричного уравнения $\tau[Y]-\lambda Y=0$ и перепишем его в виде

$$Y''+\lambda Y-AY=A_0Y \tag{5}$$

Рассматривая (5) как уравнение с правой частью и применяя метод вариации произвольных постоянных, найдем

$$Y(x,\lambda)=\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}x\right)C_1+\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)C_2+$$
$$+\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}x\right)\int_{x_1}^{x}\frac{\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}\xi\right)}{2\sqrt{A-\lambda I}}A_0(\xi)Y(\xi,\lambda)d\xi- \tag{6}$$
$$-\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)\int_{x_2}^{x}\frac{\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}\xi\right)}{2\sqrt{A-\lambda I}}A_0(\xi)Y(\xi,\lambda)d\xi,$$

где C_1 и C_2 - постоянные матрицы.

Выбирая произвольные C_1, C_2, x_1, x_2, получим различные частные решения уравнения (5).

Положим $C_1=I, C_2=0, x_1=x_2=\infty$, тогда уравнение (6) примет вид

$$Y_1(x,\lambda)=\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}x\right)+$$
$$+\frac{1}{2}(A-\lambda I)^{-\frac{1}{2}}\int_{x}^{\infty}\left(\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}(\xi-x)\right)-\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}(x-\xi)\right)\right)A_0(\xi)Y_1(\xi,\lambda)d\xi. \tag{7}$$

Положим $Y_1(x,\lambda)=\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}x\right)Z_1(x,\lambda)$. Подставляя это выражение в соотношение (7), получим

$$Z_1(x,\lambda)=I+\frac{1}{2}\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)(A-\lambda I)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\int_{x}^{\infty}\left(\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}(\xi-x)\right)-\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}(x-\xi)\right)\right)A_0(\xi)\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}x\right)Z_1(\xi,\lambda)d\xi. \tag{8}$$

Пусть S есть часть комплексной плоскости, принадлежащая множеству $C_A(\lambda)$. Тогда на основании лемм 1 и 2 уравнение (8) имеет решение, непрерывное относительно пар $(x,\lambda), 0\le x<\infty, \lambda\in S$ и голоморфное относительно $\lambda\in S$ при любом фиксированном $x\in[0,\infty)$. Очевидно, $Y_1(x,\lambda)=\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}x\right)Z_1$ будет тогда решением уравнения (7), удовлетворяющим исходному уравнению (5). Учитывая ограниченность матрицы $Z_1(x,\lambda)$, приходим к асимптотической формуле $Z_1(x,\lambda)\to I$, имеющей место, если $x\to\infty$.

Если положить $C_1=0, C_2=I, x_1=x_2=\infty$, то уравнение (6) примет вид

$$Y_2(x,\lambda)=\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)+\frac{1}{2}(A-\lambda I)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\int_{x}^{\infty}\left(\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}(\xi-x)\right)-\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}(x-\xi)\right)\right)A_0(\xi)Y_2(\xi,\lambda)d\xi.$$

Если предположить, что решение $Y_2(x,\lambda)$ представимо в виде $Y_2(x,\lambda)=\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)Z_2$, то и в этом случае, так же как и выше аналогично предыдущему, получим равномерную относительно параметра $\lambda\in S$ асимптотическую оценку $Z_2(x,\lambda)\to I$, если $x\to\infty$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если $A_0(x)\in L_n^1(R^+)$, то решения $Y_1(x,\lambda)$ и $Y_2(x,\lambda)$ уравнения (5) голоморфны относительно параметра $\lambda\in S$ и, если $x\to\infty$, то выполняются соотношения

$$Y_1(x,\lambda)=\exp\left(\sqrt{A-\lambda I}x\right)(I+o(I)),\ Y_2(x,\lambda)=\exp\left(-\sqrt{A-\lambda I}x\right)(I+o(I))$$

равномерно относительно λ в области S, принадлежащей множеству $C_A(\lambda)$.

Теорема 3. Если $A_0(x)\in L_n^1(R^+)$, то спектр оператора T состоит из лучей Γ_j и не более чем счетного множества собственных значений.

В самосопряженном случае по лучам Γ_j можно определить кратность спектра оператора на различных участках λ - оси.

Список литературы

1. **Федорюк М. В.** Спектральный анализ и задача о рассеянии для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}+A(x)$ // I – Дифференциальные уравнения. 1972. № 6. С. 986–994.
2. **Штраус А. В.** О спектральных функциях дифференциального оператора четного порядка // ДАН СССР. 1957. № 1. С. 67-70.