Холодов Вячеслав Сергеевич
РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР, ПОРОЖДАЕМЫЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМОЙ ЛОРЕНЦА

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2010. № 7 (38). C. 76-80. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/7/

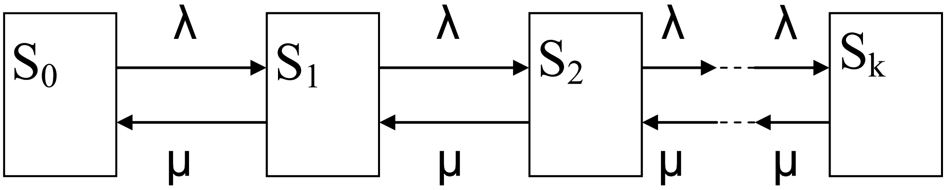

Рис. 3. *Сеть Ethernet как система массового обслуживания*

Табл. 1. *Предельные вероятности состояний*

Состояния системы	*Предельные вероятности состояний*
S_0 – канал свободен S_1 – канал занят, очереди нет S_2 – канал занят, одна заявка в очереди ……………………………… S_k – канал занят, k-1 заявок в очереди ………………………………	$P_0 = 1 - \rho$ $P_1 = \rho(1 - \rho)$ $P_2 = \rho^2(1 - \rho)$ ………………………………………………… $P_k = \rho^k(1 - \rho)$ …………………………………………………

Так как потоки событий (поступления заявок и выполнения заявок) в случае локальной сети *Ethernet* являются стационарными, интенсивности «лямбда» и «ню» (Рис. 3) определяются, как среднее число событий в единицу времени $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$. Исходные данные для определения интенсивностей λ и μ могут быть получены при помощи утилиты ping.

Список литературы

1. **Абчук В. А.** Справочник по исследованию операций. М.: Воениздат, 1979. 157 с.
2. **Олифер В. Г., Олифер Н. А.** Компьютерные сети. СПб.: Питер, 2009. 550 с.

УДК 51

Вячеслав Сергеевич Холодов
ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР, ПОРОЖДАЕМЫЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМОЙ ЛОРЕНЦА©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

Многие объекты окружающего мира являются хаотическими системами, т.е. при сколь угодно малом изменении начального состояния такой системы становится невозможным точное определение ее состояния на достаточно больших временах. Для подобного объекта важное значение имеет описание всех его состояний, которые могут наблюдаться по прошествии достаточно большого промежутка времени. Особенно существенным является изучение минимального множества состояний, равномерно притягивающего с течением времени все траектории хаотической диссипативной системы. Такое минимальное множество называют аттрактором. В настоящей работе вопрос о существовании аттрактора изучается на примере неавтономной системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами.

1. Полупроцессы и их аттракторы

Вначале определим понятия полупроцессов и их аттракторов [1-3].

Пусть E - полное метрическое пространство с метрикой $\operatorname{dist}_E(\cdot,\cdot)$; T - нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $T_+ = T \cap [0;+\infty]$ - полугруппа неотрицательных элементов из T. Например, $T_+ = \mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ для систем с непрерывным временем, $T_+ = \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ и $T_+ = \mathbb{Z}_+\tau = \{0,\tau,2\tau,\ldots\}$, где $\tau > 0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in T_+$, $t \in T_+$, $t \ge h$ на E определены непрерывные операторы $K(t,h): E \to E$ такие, что

$$K(t,s)K(s,h) = K(t,h) \quad \forall t,s,h \in T_+ : t \ge s \ge h \tag{1.1}$$

Тройку $\{K,T_+,E\}$ будем называть *полупроцессом*. Рассмотрим семейство операторов $K_f(t,h)$, функционально зависящих от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты системы уравнений. Пусть F - некоторое множество символов и каждому $f \in F$ поставлен в соответствие полупроцесс $\{K_f,T_+,E\}$. Множество всех полупроцессов $\{K_f,T_+,E\}$ таких, что $f \in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\{K_f,T_+,E,F\}$.

Множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{K_f,T_+,E,F\}$, если для любого ограниченного в E множества B имеет место равенство

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in T_+}} \sup_{f\in F} \operatorname{dist}_E\left(K_f(t,h)B,P\right) = 0 \quad \forall h \in T_+, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{dist}_E(X,Y) = \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} \operatorname{dist}_E(x,y)$.

Определение (1.2) можно сформулировать и следующим образом: множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{K_f,T_+,E,F\}$, если для любого $\varepsilon > 0$, любого $h \in T_+$ и любого ограниченного в E множества B существует время $t_0 = t_0(\varepsilon,h,B) > 0$ такое, что

$$K_f(t+h,h)B \subseteq O_\varepsilon(P) \quad \forall t \in T_+, t > t_0, \quad \forall f \in F, \tag{1.3}$$

где $O_\varepsilon(P) = \bigcup_{x\in P} O_\varepsilon(x)$ есть ε-окрестность множества P в E.

Равномерным аттрактором семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором*.

2. Аттрактор неавтономной системы Лоренца

Пусть заданы непрерывные функции $\sigma^0(t)$, $r^0(t)$, $b^0(t)$, причѐм $\sigma^0(t)$ и $r^0(t)$ непрерывно дифференцируемы и существуют положительные постоянные c_k, $k = \overline{1,8}$ такие, что при всех $t \ge 0$ верны неравенства

$$c_1 \le \sigma^0(t) \le c_2, \quad \left|\frac{d\sigma^0(t)}{dt}\right| \le c_3, \quad c_4 \le r^0(t) \le c_5, \quad \left|\frac{dr^0(t)}{dt}\right| \le c_6, \quad c_7 \le b^0(t) \le c_8 \tag{2.1}$$

Обозначим вектор $q^0(t) = \left(\sigma^0(t), r^0(t), b^0(t)\right)$ и введѐм множество всех его неотрицательных сдвигов по времени $Q = \bigcup\limits_{s\ge 0} q^0(t+s)$.

Рассмотрим задачу Коши для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(t)\,(y-x), \quad \dfrac{dy}{dt} = r(t)x - y - xz, \quad \dfrac{dz}{dt} = xy - b(t)z, \quad t > h, \\ x(h) = x_0, \quad y(h) = y_0, \quad z(h) = z_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $h \ge 0$ и $q(t) = \left(\sigma(t), r(t), b(t)\right) \in Q$.

Вектор $q(t) = \left(\sigma(t), r(t), b(t)\right) \in Q$ является *символом*, то есть множеством всех зависящих от времени коэффициентов системы уравнений (2.2). По теореме о продолжении решений нормальных систем, решение задачи (2.2) определено при $\forall t \ge 0$. Будем его записывать как $(x(t), y(t), z(t)) = K_q(t,h)(x_0,y_0,z_0)$, $t \ge h$. Тем самым заданы операторы $K_q(t,h)$, обладающие свойством (1.1) при $\forall q \in Q$. Непрерывность $K_q(t,h)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости от начального условия решений задачи Коши. Таким образом, для каждого $q \in Q$ определѐн *полупроцесс* $\{K_q,\mathbb{R}_+,E\}$, где $\mathbb{R}_+ = T_+ = [0,+\infty)$ - область изменения переменной t, $E = \mathbb{R}^3$ - множество, которому принадлежат начальные состояния (x_0,y_0,z_0). Объединение этих полупроцессов по всем $q \in Q$ образует *семейство полупроцессов* $\{K_q,\mathbb{R}_+,E,Q\}$, порождаемое задачей (2.2).

Далее мы будем использовать неравенство

$$AB \le \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \tag{2.3}$$

Обозначим $u = z - \sigma - r$, в новых переменных (2.2) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(t)\,(y-x), \quad \dfrac{dy}{dt} = -\sigma(t)x - y - xu \\ \dfrac{du}{dt} = xy - b(t)u - b(t)\left(\sigma(t)+r(t)\right) - \dfrac{d\sigma(t)}{dt} - \dfrac{dr(t)}{dt} \\ x(h) = x_0, \quad y(h) = y_0, \quad u(h) = u_0 = z_0 - \sigma(h) - r(h) \end{cases} \tag{2.4}$$

Аналогичным образом, задача (2.4) порождает *семейство полупроцессов* $\{W_q, \mathbb{R}_+, I, Q\}$, где $(x(t), y(t), u(t)) = W_q(t,h)(x_0, y_0, u_0)$, $I = \mathbb{R}^3$ - множество, которому принадлежат начальные состояния (x_0, y_0, u_0). Умножая уравнения (2.4) на x, y и u соответственно, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{dx^2}{dt} = \sigma(t)\,(yx - x^2), \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dt} = -\sigma(t)xy - y^2 - xuy \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{du^2}{dt} = uxy - b(t)u^2 - b(t)u\left(\sigma(t)+r(t)\right) - u\dfrac{d\sigma(t)}{dt} - u\dfrac{dr(t)}{dt} \\ x(h) = x_0, \quad y(h) = y_0, \quad u(h) = u_0 = z_0 - \sigma(h) - r(h) \end{cases} \tag{2.5}$$

Суммируя уравнения системы, получим

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + u^2) = 2\left(-\sigma x^2 - y^2 - bu^2 - bu(\sigma + r) - u\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dr}{dt}\right)\right) \tag{2.6}$$

Здесь и далее в тексте для сокращения записи не будем явно указывать, что коэффициенты σ, r, b зависят от времени, хотя об этом, конечно же, нужно помнить.

Далее сделаем оценку сверху членов в правой части уравнения (2.6)

$$2\left(-\sigma x^2 - y^2 - bu^2\right) \le 2\left(-c_1 x^2 - y^2 - c_7 u^2\right) \le -a(x^2 + y^2 + u^2), \tag{2.7}$$

где $a = \min\{2c_1, 2, 2c_7\}$.

Опираясь на неравенство (2.3), находим

$$\begin{aligned} -2ub(\sigma + r) &\le 2|u| c_8 (c_2 + c_5) \le 4\varepsilon u^2 + \frac{c_8{}^2 (c_2 + c_5)^2}{4\varepsilon} \\ -2u\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dr}{dt}\right) &\le 2|u|(c_3 + c_6) \le 4\varepsilon u^2 + \frac{(c_3 + c_6)^2}{4\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Введем следующие обозначения $U = x^2 + y^2 + u^2$, $C = c_8{}^2 (c_2 + c_5)^2 + (c_3 + c_6)^2$ и, используя их, а также (2.6), (2.7), (2.8), получим неравенство

$$\frac{dU}{dt} \le -aU + 8\varepsilon u^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \le U(-a + 8\varepsilon) + \frac{C}{4\varepsilon} \tag{2.9}$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ возьмем его таким что $-a + 8\varepsilon < 0,$ т.е. $0 < \varepsilon < \dfrac{a}{8}.$ Обозначим $\gamma \equiv a - 8\varepsilon > 0.$ Тогда из неравенства (2.9) получим

$$\frac{dU}{dt} + \gamma U \le \frac{2C}{a - \gamma}$$

Умножив полученное соотношение на $e^{\gamma t}$, приведем его к виду

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t} U\right) \le \frac{2C}{a - \gamma} e^{\gamma t}$$

Проинтегрировав последнее неравенство по времени от h до $t \ge h$, и затем поделив его на $e^{\gamma t}$, приходим к оценке

$$U(t) \le U_0 e^{-\gamma(t-h)} + \frac{2C}{\gamma(a - \gamma)}\left(1 - e^{-\gamma(t-h)}\right), \tag{2.10}$$

где $U_0 = x_0{}^2 + y_0{}^2 + u_0{}^2$.

Теорема 1. Семейство полупроцессов $\{K_q, \mathbb{R}_+, E, Q\}$, порождаемое задачей (2.2), имеет аттрактор A, причем

$$x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{16C}{a^2} - 2D + 4(c_2 + c_5)^2 \quad \forall\, (x, y, z) \in A,$$

где $D = c_1^2 + c_4^2 + 2c_1c_4 = (c_1 + c_4)^2$.

Доказательство. Сначала докажем, что СПП $\{W_q, \mathbb{R}_+, I, Q\}$, порождаемое задачей (2.4) имеет равномерно притягивающее множество. Для этого воспользуемся оценкой (2.10), полученной для решений системы (2.4), и возьмем $\varepsilon = \frac{a}{16} > 0,$ тогда $\gamma = \frac{a}{2} > 0$ и неравенство (2.10) примет вид

$$U(t) \le U_0 e^{-\frac{a}{2}(t-h)} + \frac{8C}{a^2}\left(1 - e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\right) \tag{2.11}$$

Покажем, что замкнутый шар $P = \left\{x, y, u:\ x^2 + y^2 + u^2 \le \frac{8c}{a^2}\right\}$ является равномерно притягивающим множеством СПП, порождаемого задачей (2.4). Возьмѐм произвольные $\varepsilon > 0$ и ограниченное множество $B \subset \mathbb{R}^3$. Существует постоянная $M > 0$ такая, что $x^2 + y^2 + u^2 = U \le M$ для всех $(x, y, u) \in B$. Используя (2.11), находим, что для решений (2.4) с начальным условием $(x_0, y_0, u_0) \in B$ верна оценка

$$U(t) \le Me^{-\frac{a}{2}(t-h)} + \frac{8C}{a^2}\left(1 - e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\right) = \frac{8C}{a^2} + e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\left(M - \frac{8C}{a^2}\right) \tag{2.12}$$

Отсюда вытекает, что:

1) если $M - \frac{8C}{a^2} < \varepsilon^2,$ то справедлива оценка $U(t) \le \frac{8C}{a^2} + e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\left(M - \frac{8C}{a^2}\right) \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2,$

из которой следует, что $(x(t), y(t), u(t)) \in \left\{x, y, u:\ x^2 + y^2 + u^2 \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2\right\} \subset O_\varepsilon(P)$ при всех $t \ge h$, $(x_0, y_0, u_0) \in B$;

2) если $M - \frac{8C}{a^2} \ge \varepsilon^2,$ то $(x(t), y(t), u(t)) \in \left\{x, y, u:\ x^2 + y^2 + u^2 \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2\right\} \subset O_\varepsilon(P)$ при всех $t > h + t_0$, $(x_0, y_0, u_0) \in B$, где $t_0 = -\frac{2}{a}\ln\frac{\varepsilon a^2}{Ma^2 - 8C} > 0.$

Далее воспользуемся неравенством, которое получается из соотношения (2.3),

$$-AB \ge -\varphi A^2 - \frac{B^2}{4\varphi} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}, \forall \varphi > 0.$$

Применим его, а также соотношения (2.1), для оценки снизу следующего выражения

$$u^2 = (z - \sigma - r)^2 = z^2 + \sigma^2 + r^2 - 2z\sigma - 2zr + 2\sigma r \ge z^2 + c_1^2 + c_4^2 - 2z(\sigma + r) + 2c_1c_4$$

Перепишем полученное соотношение как

$$u^2 \ge D + z^2 - 2z(\sigma + r) \tag{2.13}$$

и оценим в нем последнее слагаемое

$$-2z(\sigma + r) \ge -2\varphi z^2 - \frac{(\sigma + r)^2}{2\varphi} \ge -2\varphi z^2 - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \quad \forall \varphi > 0$$

Тогда (2.13) примет вид

$$u^2 \ge D + z^2(1 - 2\varphi) - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \quad \forall \varphi > 0$$

Используя эту оценку, получим неравенство

$$(1 - 2\varphi)\left[x^2 + y^2 + z^2\right] + D - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \le x^2 + y^2 + (1 - 2\varphi)z^2 + D - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \le$$

$$\le x^2 + y^2 + u^2 \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2 \quad \forall \varphi > 0,$$

из которого при $\varphi = \frac{1}{4}$ имеем $x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{16c}{a^2} + 2\varepsilon - 2D + 4(c_2 + c_5)^2$

Получили, что замкнутый шар $H = \left\{ x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{16c}{a^2} - 2D + 4(c_2 + c_5)^2 \right\}$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{K_q, \mathbb{R}_+, E, Q\}$, порождаемого задачей (2.2). Но в [3] доказана теорема о том, что если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор. Таким образом, наша теорема доказана.

Автор благодарит В. М. Ипатову за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

1. **Ипатова В. М.** Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. 1997. Т. 188. № 6. С. 47-56.
2. **Ипатова В. М.** Равномерный аттрактор неавтономного дифференциального уравнения // Альманах современной науки и образования. 2009. № 12. Ч. 1. С. 39-42.
3. **Chepyshov V. V., Vishik M. I.** Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. P. 279-333.