

Ильюшин Юрий Валерьевич

НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ НАЧАЛЬНОГО НАГРЕВА ДВУХМЕРНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/8/19.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 8 (39). С. 52-56. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/8/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

В свободномолекулярном режиме выражения (12) и (13) совпадают между собой. Формальное совпадение указанных соотношений имеет место и в газодинамическом пределе. При этом (13) соответствует значению коэффициента изотермического скольжения $C_m = 2$, что более чем на 7% выше точного.

Для сравнения на Рис. 3 представлена зависимость отношения: $M^* = -\frac{M_z}{M_\infty}$, от числа Кнудсена. Здесь $M_\infty = 8 R^3$ – значение момента сил трения, рассчитанное в газодинамическом пределе.

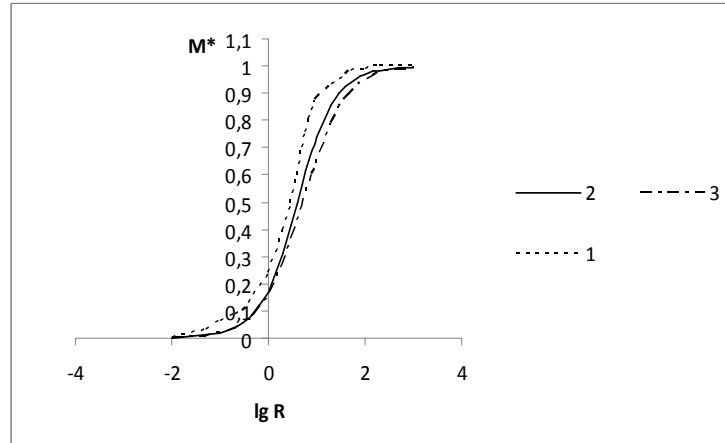


Рис. 3. Зависимость момента сил трения от числа Кнудсена:
1 – данные [4], 2 – представленная теория, 3 – данные [1]

Список литературы

1. Подоскин А. Б., Юшканов М. С. Медленное вращение сферы в разреженном газе // МЖГ. 1997. № 1. С. 165-171.
2. Савков С. А., Тюлькина Е. Ю. О вычислении потока тепла от сферической частицы в молекулярном газе // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 1. С. 63-68.
3. Смирнов Л. П., Чекалов В. В. Медленное вращение сферы в ограниченном объеме разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 117-124.
4. Черчињьяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
5. Lees L. Kinetic theory description of rarefied gas flow // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. № 1. P. 278-311.

УДК 681.5

Юрий Валерьевич Ильюшин
Пятигорский государственный технологический университет

НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ НАЧАЛЬНОГО НАГРЕВА ДВУХМЕРНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ[©]

Рассмотрим объект управления, имеющий две пространственные координаты. Для этого рассмотрим пластину с пространственными координатами x и y . Материал объекта имеет теплопроводность a (см. Рис. 1). На концах пластины поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура во всех точках пластины имеет нулевые значения. При таких условиях математическая модель объекта управления примет вид [1, с. 19]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right);$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; 0 < z < L_z.$$

Граничные и начальные условия объекта управления:

$$T(x, y, z) = U(x, y, z); \quad \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial r} = 0;$$

$$T(x, 0, z) = T(x, L_y, z) = T(0, y, z) = T(L_x, y, z) = 0;$$

$$T(x, y, 0) = 0$$

Значение температуры, определяющееся с помощью функции Грина которая в двухмерном варианте примет вид [2, с. 195]:

$$G(x, y, \xi, t) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \cdot}{l_2}\right) \times \exp\left[-a^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right]$$

Где x, y – координата точки нагрева; l_1 – длина отрезка; l_2 – ширина отрезка; ξ – точка нагрева пластины с координатами x, y ; k, m – количество элементов ряда Фурье по ширине и длине; $X1(p, v)$ – координаты температурного датчика.

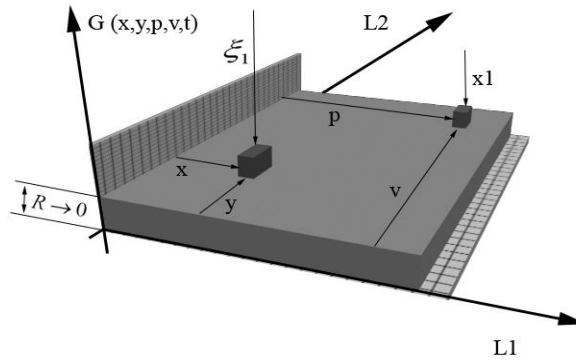


Рис. 1. Рассматриваемый объект

Толщиною пластины будем пренебрегать, поэтому будем полагать, что толщина пластины стремится к нулю, но не равно нулю. Рассмотрим влияние составляющих ряда Фурье в начальный момент времени. При начальных условиях системы равных $n \rightarrow \infty, t = 0, \xi = 0$, получим:

$$\exp\left[-a^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right)\right] = 1$$

Тогда значение температуры в точках пластины с учетом пространственной привязки будет выражаться формулой:

$$T(x, y, \xi) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \xi}{l_1}\right) \cdot p \cdot \sin\left(\frac{m \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot v}{l_2}\right) v$$

Пусть импульсный тепловой источник оказывает воздействие в точке $p = v = \frac{l}{4}$, тогда формула примет вид:

$$T(x, y, \xi) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \xi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot y}{l_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot v}{4}\right)$$

Амплитуда каждой составляющей ряда Фурье примет вид: $A_n = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \left| \sin \frac{p}{4} \cdot \sin \frac{v}{4} \right|$. Рассчитаем первые

пяти составляющих ряда Фурье, при $x = y = \frac{l}{4}, p = v = 1, 2, 3, 4, 5$ получим:

$$T_1(x, y) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \left(\sin \frac{1}{4} \sin \frac{1}{4} x\right) \cdot \left(\sin \frac{1}{4} \sin \frac{1}{4} y\right) ; A_1 = 32 \frac{1}{l^2} ;$$

$$T_2(x, y) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \left(\sin \frac{2}{4} \sin \frac{2}{4} x\right) \cdot \left(\sin \frac{2}{4} \sin \frac{2}{4} y\right) ; A_2 = 64 \frac{1}{l^2} ;$$

$$T_3(x, y) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \left(\sin \frac{3}{4} \sin \frac{3}{4} x\right) \cdot \left(\sin \frac{3}{4} \sin \frac{3}{4} y\right) ; A_3 = 32 \frac{1}{l^2} ;$$

$$T_4(x, y) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \left(\sin \frac{4}{4} \sin \frac{4}{4} x\right) \cdot \left(\sin \frac{4}{4} \sin \frac{4}{4} y\right) ; A_4 = \frac{1}{l^2} ;$$

$$T_5(x, y) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \left(\sin \frac{5}{4} \sin \frac{5}{4} x\right) \cdot \left(\sin \frac{5}{4} \sin \frac{5}{4} y\right) ; A_5 = 32 \frac{1}{l^2}$$

Известно, что функция Грина $G(x, y, z, t) \geq 0$, при любых значениях переменных x, y, z, t . В случае если $t=0$ и имеется большое количество слагаемых ряда Фурье n - значения функции, имеющие отрицательные корни будут исчезать. А область значений x , при которых функция положительна, будет сужаться, приближаясь со всех сторон к точке приложения воздействия $p = v = \frac{l}{4}$. При этом значение функции в точках $p, v \rightarrow \infty$.

Выражение $\frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot}{l_1}\right) x \cdot \sin\left(\frac{k \cdot}{l_1}\right) p \cdot \sin\left(\frac{m \cdot}{l_2}\right) y \cdot \sin\left(\frac{m \cdot}{l_2}\right) v$ представляет собой пространственно распределенную дельта-функцию в виде ряда Фурье, т.е. $\Delta(x-p, y-v) = \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \cdot \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \cdot}{l_1}\right) x \cdot \sin\left(\frac{k \cdot}{l_1}\right) p \cdot \sin\left(\frac{m \cdot}{l_2}\right) y \cdot \sin\left(\frac{m \cdot}{l_2}\right) v$. Δ - это функция относится к классу «обобщённых функций». Класс обобщенных Δ -функций находит широкое применение при исследовании моделей объектов управления с распределёнными параметрами.

Аргументами Δ -функции $\Delta(x-p, y-v)$ являются пространственные координаты x и y , которые определяют ширину и длину пластины, рассматриваемая как векторная величина для многомерных пространственных областей. Функция $\Delta(x-p, y-v) = 0$ в пределах всей занимаемой пластиной области пространства, кроме точки p, v , в которой функция Δ принимает значения, равные бесконечности.

$$\Delta(x-p, y-v) = \begin{cases} \infty, & \text{при } y = v \\ 0, & \text{при } y \neq v \\ \infty, & \text{при } x = p \\ 0, & \text{при } x \neq p \end{cases}$$

Для функций $f(x, y)$, распределённых на объекте фиксированной длины $[0, l_1][0, l_2]$, имеет место, следующее равенство:

$$\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(x, y) \Delta(x-p, y-v) dx \cdot dy = f(p, v)$$

Аналогично предыдущему примеру вводится понятие временной Δ -функции $\Delta(t - \tau)$. Целью, которой является описания ограниченных по расходу энергии импульсных воздействий достаточно малой длительности. В идеальном случае временная функция Δ - это бесконечно большое воздействие, сосредоточенное в фиксированный момент времени. Дельта-функция $\Delta(t - \tau) = 0$ при любых t . Исключением составляет случай когда $t = \tau$, при котором функция обращается в бесконечность, причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t - \tau) dt = 1$$

Если $f(t)$ - любая детерминированная и ограниченная функция на отрезке фиксированной длины $[t_0, t]$, то

$$\int_{t_0}^t f(t) \Delta(t - \tau) dt = \begin{cases} f(\tau), & \text{если } \tau \in [t_0, t]; \\ 0, & \text{если } \tau \notin [t_0, t], \end{cases}$$

Применительно к функции $f(x, y, t)$ трех переменных - скалярных пространственных координат x и y по времени t . Векторная Δ -функция, моделирующая детерминированное воздействие, наносимое в момент времени $\tau \in [t_0, t]$ в точке $x \in [0, l_1], y \in [0, l_2]$, описывается произведением трех переменных во времени Δ -функций $\Delta(x-p) \Delta(y-v) \Delta(t - \tau)$. Интегральное представление данной функции будет иметь следующий вид:

$$\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_{t_0}^t f(x, y, t) \cdot \Delta(y-v) \cdot \Delta(x-p) \cdot \Delta(t - \tau) \cdot dx \cdot dy \cdot dt = f(p, v, \tau)$$

Таким образом, полагая, что на рассматриваемый объект было приложено единичное импульсное возмущение, приложенное в точке p_0, v_0 в момент времени τ_0 , то выходная функция примет следующий вид:

$$T(x, y, t) = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^t G(x, y, t, p, v, \tau) \Delta(p-p_0) \Delta(v-v_0) \Delta(t - \tau_0) dp dv d\tau = G(x, y, t, p_0, v_0, \tau_0)$$

При фиксации времени $t \neq 0$, амплитуда составляющих члена ряда Фурье примет, следующий вид:

$$A_n = \left| \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \sin \frac{n}{l_1} p \cdot \sin \frac{n}{l_2} v \cdot \exp \left[-a^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right) \right] \right|$$

При $n \rightarrow \infty$, значение $A_n \rightarrow 0$, т.е. действие каждой последующей гармоники ряда, уменьшается. Определим согласно заданной точности ϵ , начиная с какого номера гармоники ряда Фурье n всеми последующими гармониками ряда можно пренебречь [3, с. 195]. Пусть $|A_n| \leq \epsilon$, известно, что $\left| \sin \frac{n}{l} (p, v) \right| \leq 1$, тогда

$$\left| \frac{4}{l} \sin \frac{n}{l} (p, v) \right| \leq \frac{4}{l}, \left| \exp \left[- \left(\frac{na}{l} \right)^2 t \right] \right| \leq \frac{l}{4}, \text{ откуда: } \exp \left[\left(\frac{na}{l} \right)^2 t \right] \geq \frac{4}{l}, \left(\frac{na}{l} \right)^2 t \geq \ln \frac{4}{l}, n^2 t \geq \left(\frac{l}{a} \right)^2 \ln \frac{4}{l},$$

$$\text{в итоге: } n \geq \frac{l}{a\sqrt{t}} \sqrt{\ln \frac{4}{l}};$$

Например, при значениях $l=10$, $a=0,01$, $t=10000$, $\epsilon=0,0001$; получаем следующие значения $n \geq 9.167$. Из приведенных вычислений получаем что для определения значения функции с точностью $\epsilon=0,0001$ достаточно взять 9 членов ряда Фурье. Логично заметить, что амплитуда уменьшается так же при $t \rightarrow \infty$. Также можно установить, начиная с какого значения времени, t составляющие ряда Фурье начнут оказывать наименьшее воздействие при $n \geq n_0$, после чего ими можно пренебречь. Рассчитаем это время при тех же начальных условиях:

$$t \geq \left(\frac{l}{na} \right)^2 \ln \frac{4}{l}$$

$$t \geq 0.25$$

Полученная математическая модель и интегральное решение выходной функции показывают что, как и к одномерному объекту исследуя температурное поле по функции Грина, необходимо найти и функцию начального нагрева с целью исследования временно-температурных процессов. Попытаемся найти функцию начального нагрева для двухмерного объекта управления.

Пусть на изолированной плоскости установлены n точечных импульсных источника и n датчика. Для данной плоскости применимы следующие условия $T(0, y, t) = T(l_1, y, t) = 0; T(x, 0, t) = T(x, l_2, t) = 0; T(x, y, 0) = 0$; l_1, l_2 - импульсные нагревательные элементы; x_1, x_2 - датчики контроля температуры. В начальный момент времени $t_0 = 0$ включаются все расположенные равномерно по пластине нагревательные элементы. Действие всех нагревательных элементов на первый датчик будет вычисляться по функции:

$$T(x_1, y, t, t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \left[-a^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right) \right] \cdot \sin \left(\frac{k \cdot x}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot y}{l_2} \right) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot x}{l_1} \right) \times$$

$$\times \sin \left(\frac{m \cdot y}{l_2} \right);$$

Первый нагревательный имеет максимальную амплитуду, так как система еще не перешла в рабочий режим. Нагревательные элементы создают первый нагревательный импульс, показанный на Рис. 2. Он имеет пиковые значения температуры в датчиках. Распространение температуры по пластине происходит кольцеобразно.

Таким образом, график функции, демонстрирующий распространение тепла в пространственно двумерном объекте будет выглядеть следующим образом:

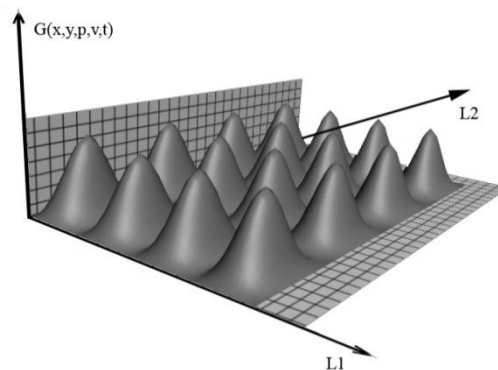


Рис. 2. Первый нагревательный импульс

С истечением времени значение температурного поля будет изменяться согласно сумме существующего температурного поля и нового воздействия. С целью изучения температурного поля с истечением времени найдем функцию начального нагрева и сложим ее с текущим значением функции Грина.

$$T(x_j, y_j, t) = \sum_{i=1}^d \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \exp \left[-a^2 \cdot t \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right) \right] \cdot \sin \left(\frac{k \cdot x_j}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot y_j}{l_2} \right) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot i}{l_1} \right) \times \\ \times \sin \left(\frac{m \cdot i}{l_2} \right) + \sum_p \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{4}{l_1 \cdot l_2} \exp \left[-a^2 \cdot (t - \tau_p) \cdot \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right) \right] \cdot \sin \left(\frac{k \cdot x_j}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot y_j}{l_2} \right) \times \\ \times \sin \left(\frac{k \cdot z(p)}{l_1} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot z(p)}{l_2} \right);$$

где d – количество источников нагрева; $p = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер включения источника; $z(p)$ – один из источников нагрева; τ_p – момент времени включения источника под номером $z(p)$; l_1 – длина; l_2 – ширина; p, v – координаты точечного источника; a – температуропроводность материала; k, m – количество членов ряда Фурье при разложении входящего воздействия по ширине и длине; x, y – исследуемая точка; t – момент времени.

Полученная функция начального нагрева способна определить поведение температурного поля с течением времени в любой точке объекта управления.

Список литературы

1. Каргашов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
2. Першин И. М. Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: Изд-во РИА-КМВ, 2007. 244 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

УДК 532.517.4:536.24

Игорь Евгеньевич Лобанов

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С НИЗКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОДНОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ[©]

1. Введение

В настоящее время в целях тепловой защиты всё чаще применяются материалы с низким коэффициентом теплопроводности, который, как правило, растёт с повышением температуры. Имеет место тенденция разработки новых теплоизолирующих материалов с все более низкими коэффициентами теплопроводности. Результатом чего является то, что решение линейной нестационарной задачи теплопроводности будет всё больше расходиться с решением нелинейной нестационарной задачи теплопроводности, что снижает точность прогнозирования нестационарных тепловых нагрузок. В связи с этим актуально рассмотрение очень важного случая нестационарной теплопроводности – случая нелинейной нестационарной теплопроводности для тел с низким коэффициентом теплопроводности одномерной геометрической формы.

2. Решение нелинейной нестационарной обратной задачи теплопроводности для тела с низким коэффициентом теплопроводности одномерной геометрии

Существующие точные решения обратных задач нестационарной теплопроводности довольно немногочисленны, их гораздо меньше, чем решений прямой задачи нестационарной теплопроводности. Следует особо отметить, что одной из первых удачных попыток решения обратной задачи нестационарной теплопроводности для тела плоской геометрии впервые была предпринята ещё в 1890 г. Й. Стефаном [14]. Альтернативные решения одномерной линейной обратной задачи нестационарной теплопроводности было получено независимо друг от друга О. Р. Бургграфом [2] и Д. Лэнгфордом [13] в предположении известности в точке расположения датчика нестационарных температуры и плотности теплового потока. В. А. Коверьянов в [7] получил точные решения для полых цилиндров и сфер, где плотность теплового потока на активной поверхности детерминировалась дифференцированием поля температур. Точное решение для поля температур по известным температурам в двух различных внутренних точках методом интегрального преобразования Лапласа было получено М. Имбером и Д. Кханом [3]. Запишем уравнение нелинейной нестационарной теплопроводности для тела одномерной геометрии в следующем виде [1; 12]:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla^2 T + \frac{d(\ln \lambda)}{dT} (\nabla T)^2. \quad (1)$$