телу одежды; трикотаж с вплетенными полосками флизелина, напоминающего шкуру животного; ткань с регулярными и нерегулярными плиссировками И. Мияке. Ю. Ватанабэ представил коллекцию из ткани сверхлегкого водонепроницаемого волокна (хай-тек), фактурой напоминающей улей, объемная структура которой складывается в плоское полотнище [1, с. 135].

Концепция взаимодействия между костюмом и природой, основанная на единстве законов формирования и функционирования биологических и искусственных систем, формирует новое направление биотехнологий XXI века. Китайская компания биохимических разработок *Puyang Huakang* производит соевое волокно на основе протеинов, по свойствам не уступающее классическим материалам (кашемиру и шелку). Одежда, изготовленная из этого волокна полезна для здоровья, поскольку содержит витамин Е и сапонин - вещество, замедляющее процесс старения кожи [Там же, с. 136].

Манил Торрес разработал одежу из спрея, имитирующего шерсть, шелк и лен в зависимости от способа нанесения. Сьюзан Ли использует материнскую культуру (аналог чайного гриба), выращенную в ванной, для создания простыни, обертываемой по форме будущей одежды вокруг манекена. После высыхания дизайнер вырезает отверстия для рукавов. Такая вещь не теряет своей формы, соединяется без швов, легко утилизируется. Британский дизайнер, профессор Лондонского колледжа моды Хелен Стори и профессор Шеффилдского университета Тони Райан создали удивительную одежду из будущего - платья на основе окисленного нано-титана, очищающие воздух и растворяющиеся при соприкосновении с водой. Принципом своей новой линии 1325 И. Мияке выбрал оригами. «1» означает, что для изготовления модели используется один кусок ткани. «2» и «3» - двухмерную и трехмерную формы моделей. «5» - множество способов ношения юбок, брюк и платьев из этой линии.

Естественная красота и целесообразность форм природы являются примером для подражания и копирования дизайнерами по костюму. Эта перспективная по своим потенциальным возможностям область дизайна еще не до конца исследована и требует дополнительного изучения и обобщения опыта, накопленного в проектировании подобных объектов.

Список литературы

1. **Белько Т. В.** Природа. Искусство. Дизайн: монография. Тольятти: Изд-во ТГУС, 2008. 189 с.
2. **Захаржевская Р. В.** История костюма: от античности до современности. М.: РИПОЛ-классик, 2007. 288 с.
3. **Рытвинская Л. Б.** Архитектоника объемных форм: конспект лекций. М.: Изд-во Моск. текстильн. ин-та, 1980. 33 с.
4. **Сапрыкина Н. А.** Основы динамического формообразования в архитектуре. М.: Архитектура-С, 2005. 312 с.
5. **Шимко В. Т.** Основы дизайна и средовое проектирование: учеб. пособие. М.: Архитектура-С, 2005. 160 с.

УДК 514.742.4

Наталья Геннадиевна Ходырева, Людмила Геннадьевна Устинова
Московский энергетический институт (филиал) в г. Волжском

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ©

Говорят, что в некоторой области $W \subset R^3$ задано векторное поле, если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области сопоставлен вектор

$$\overline{a}(M) = a_x(x, y, z)\overline{i} + a_y(x, y, z)\overline{j} + a_z(x, y, z)\overline{k} ,$$

проекции которого - функции a_x, a_y и a_z будем считать непрерывно дифференцируемыми в этой области.

Векторное поле $\overline{a}(M) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ называется соленоидальным в области W, если его дивергенция тождественно равна нулю в этой области:

$$\operatorname{div}\overline{a}(M) = \left.\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\right|_M \equiv 0$$

Если существует такое дифференцируемое в W векторное поле $\overline{b}(M)$, что

$$\operatorname{rot}\overline{b}(M) = \overline{a}(M) ,$$

то векторное поле $\overline{b}(M)$ называют векторным потенциалом поля $\overline{a}(M)$.

Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле $\overline{a}(M) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ имело векторный потенциал $\overline{b}(M) = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ необходимо, чтобы поле $\overline{a}(M)$ было соленоидальным. Действительно, в силу правил вычисления дивергенции и ротора в координатах, а также независимости непрерывных смешанных производных от порядка дифференцирования, имеем

$$\operatorname{div}\bar{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{b} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) = 0$$

Построим векторный потенциал плоского соленоидального поля $\bar{v}(M)$ скоростей твердого тела, вращающегося относительно некоторой оси с постоянной угловой скоростью. Тело описывает некоторую ассиметричную область W .

Выберем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось вращения совпала с координатной осью Oz (Рис. 1). В точке $M(x, y, z) \in W$ частицы (точки) твердого тела имеют скорость $\bar{v}(M) = \bar{\ } \times \bar{r}$, где $\bar{\ }$ - вектор угловой скорости, направленный вдоль оси вращения, $\bar{r}$ - радиус-вектор точки M , выходящий из начала координат.

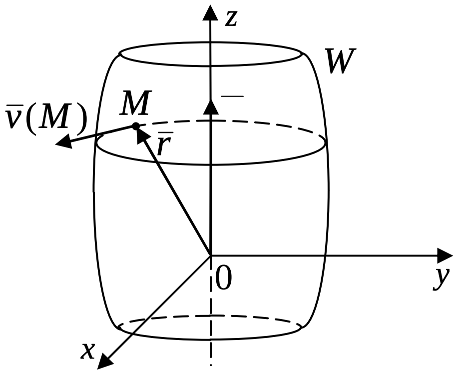

Рис. 1

Учитывая, что $\bar{\ } = \ \bar{k}$, где $\ = |\bar{\ }|$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, имеем:

$\bar{v}(M) = \bar{\ } \times \bar{r} = - \ y\bar{i} + \ x\bar{j}$

Вычислим

$$\operatorname{div}\bar{v}(M) = \frac{\partial(- \ y)}{\partial x} + \frac{\partial(\ x)}{\partial y} = 0$$

Следовательно, поле $\bar{v}(M)$ является соленоидальным, и значит, необходимое условие существования векторного потенциала $\bar{b}(M)$ выполнено.

Запишем равенство $\operatorname{rot}\bar{b} = \bar{v}(M)$ в координатах, учитывая, что $\bar{b}(M) = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_z}{\partial y} - \dfrac{\partial b_y}{\partial z} = - \ y, \\ \dfrac{\partial b_x}{\partial z} - \dfrac{\partial b_z}{\partial x} = \ x, \\ \dfrac{\partial b_y}{\partial x} - \dfrac{\partial b_x}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Положив $b_z \equiv 0$, преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_y}{\partial z} = \ y, \\ \dfrac{\partial b_x}{\partial z} = \ x, \\ \dfrac{\partial b_y}{\partial x} - \dfrac{\partial b_x}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получим

$b_y = \int \ ydz = \ yz + \ (x, y)$ и $b_x = \int \ xdz = \ xz + \ (x, y)$,

где $\ (x, y)$, $\ (x, y)$ - неизвестные функции двух переменных. Подставляя частные производные

$\frac{\partial b_y}{\partial x} = \frac{\partial \ \ (x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial b_x}{\partial y} = \frac{\partial \ \ (x,y)}{\partial y}$

в третье уравнение системы, имеем

$$\frac{\partial \ \ (x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \ \ (x,y)}{\partial y} = 0$$

Несложно найти какое-либо решение этого уравнения. Например, можно взять

$\ \ (x,y) = \ \ (x,y) \equiv 0$

Тогда

$b_x = \ \ xz$, $b_y = \ \ yz$, $b_z = 0$

Таким образом, векторный потенциал поля $\bar v(M)$ скоростей твердого тела, вращающегося относительно некоторой оси с угловой скоростью $\bar{\ }$ имеет вид

$$\bar b(M) = \ \ z\left(x\bar i + y\bar j\right),$$

где $\ \ = \left|\bar{\ }\right|$

Однако не всякое соленоидальное поле имеет векторный потенциал. Рассмотрим пример, иллюстрирующий этот факт. Зададим в области $W = \left\{ M(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2+z^2>0 \right\}$ векторное поле

$$\bar a(M) = \frac{x\bar i + y\bar j + z\bar k}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Найдем частные производные составляющих векторного поля

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)' = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} 2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3}} = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

Аналогично вычисляются

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{x^2-2y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}},\quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

Тогда

$$\operatorname{div}\bar a(M) = \frac{-2x^2+y^2+z^2+x^2-2y^2+z^2+x^2+y^2-2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = 0,$$

то есть рассматриваемое векторное поле $\bar a(M) = \frac{x\bar i + y\bar j + z\bar k}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$ является соленоидальным.

Вычислим поток векторного поля $\bar a(M)$ через сферу S, определяемую уравнением $x^2+y^2+z^2=1$.

При вычислении потока векторного поля через полную поверхность сферы воспользуемся сферическими координатами

$$\begin{cases} x = R\cos\ \ \cdot\sin\Theta, \\ y = R\sin\ \ \cdot\sin\Theta, \\ z = R\cos\Theta, \end{cases}$$

где $0 \le \ \ \le 2\ \ $, $0 \le \Theta \le \ \ $, $ds = R^2\sin\Theta d\Theta d\ \ $.

В этом случае поток поля $\bar a(M)$ через внешнюю поверхность сферы S вычисляется по формуле

$$\Pi = \iint_S \bar a\cdot\bar n\, ds = R^2\int_0^{2\ } d\ \ \int_0^{\ } \bar a\cdot\bar n \sin\Theta d\Theta,$$

где

$$\bar n = \frac{grad\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)}{\left|grad\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)\right|} = \frac{1}{R}\left(x\bar i + y\bar j + z\bar k\right)$$

С учетом того, что радиус сферы $R=1$, вычислим скалярное произведение векторного поля и вектора нормали:

$$\bar a\cdot\bar n = \frac{x\bar i + y\bar j + z\bar k}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot\left(x\bar i + y\bar j + z\bar k\right) = \frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{R}} = 1.$$

Тогда

$$\Pi = \int_0^2 d \quad \int_0 \sin\Theta d\,\Theta = 4 \quad .$$

Предположим, что поле $\bar{a}(M)$ в области W имеет векторный потенциал $\bar{b}(M)$. Выберем на поверхности S сферы замкнутый контур L, например, образованный пересечением сферы и плоскости xOy. Этот контур разделит сферу на две полусферы S_1 и S_2 и будет являться их общей границей.

Поток поля $\bar{a}(M)$ через поверхность S_1 равен

$$\Pi = \iint_{S_1} \bar{a} \cdot \bar{n}\, ds = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \bar{b} \cdot \bar{n}\, ds$$

Тогда по теореме Стокса данный поток можно заменить циркуляцией векторного потенциала $\bar{b}(M)$ вдоль контура L.

Аналогично поток поля $\bar{a}(M)$ через поверхность S_2 будет равен циркуляции поля $\bar{b}(M)$ вдоль того же контура L, но в противоположном направлении обхода. Значит, сумма двух потоков, равная потоку поля $\bar{a}(M)$ через всю сферу S равна нулю.

Однако ранее прямым вычислением было показано, что поток векторного поля $\bar{a}(M)$ через сферу S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ равен $\Pi = 4 \quad \neq 0$. Следовательно, поле $\bar{a}(M)$ не имеет векторного потенциала.

Отметим, что область W односвязна. Односвязным называется такое пространство, в котором любая замкнутая линия может быть стянута в точку непрерывным образом, не выходя при этом за границы области. В случае «проколотой пространственной области» W данного примера всякую пространственную замкнутую кривую, не проходящую через начала координат, можно стянуть в точку в этой области, то есть данная область W односвязна. Причина же патологического свойства, которое наблюдается в данном примере, состоит в том, что не все сферические поверхности - поверхности типа сферы - можно стянуть в точку, не выходя за пределы области W. Так, пространство, заключённое между двумя сферами, нельзя стянуть непрерывной деформацией в точку.

Список литературы

1. **Гаврилов В. Р., Иванова Е. Е., Морозова Е. Д.** Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 496 с.
2. **Гембаум Б., Олмстед Дж.** Контрпримеры в анализе / пер. с англ.; под ред. П. Л. Ульянова. Изд. 2-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 256 с.