

Лобанов Игорь Евгеньевич

**ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О НАМОРАЖИВАНИИ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ (КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА)**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2011/12/14.html](http://www.gramota.net/materials/1/2011/12/14.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2011. № 12 (55). С. 50-53. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2011/12/](http://www.gramota.net/materials/1/2011/12/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

## Список литературы

1. Аллен К. У. Астрофизические величины. М., 1977.
2. Барсегян А. А., Куприянов М. С., Степаненков В. В., Чолод И. И. Методы и модели анализа данных: OLAP и Data Mining. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. С. 336.
3. Беннет Ф. Волна испарения // Физика высоких плотностей энергий. М.: Мир, 1974. С. 241-257.
4. Ботт М. Внутреннее строение Земли. М.: Мир, 1974.
5. Вопросы внутреннего строения и развития Земли // Труды Геофизического ин-та АН СССР. М., 1955. № 26 (153).
6. Дюк В., Сомойленко А. Data Mining. СПб.: Питер, 2001. С. 366.
7. Костюкова Н. И. Графы и их применение. Комбинаторные алгоритмы для программистов. М.: Интернет-университет информационных технологий, 2007. С. 312.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
9. Палеомагнитология / под ред. А. Н. Храмова. М.: Мир, 1982.
10. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М.: Наука, 1950.
11. www.kdnuggets.com

УДК 621.565.9

Игорь Евгеньевич Лобанов  
Московский авиационный институт

ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О НАМОРАЖИВАНИИ  
НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ (КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА)<sup>©</sup>

**Введение**

Переход веществ из жидкого состояния в твёрдое является комплексом термодинамических, тепловых, диффузионных, гидродинамических и т.п. явлений.

В данном случае рассматривается проблема только с учётом тепловых взаимодействий между твёрдой и жидкой фазами и телами, которые находятся в тепловом контакте между ними.

В рамках рассматриваемой научной работы рассматривается задача затвердевания, т.е. переход вещества из жидкого состояния в твёрдое условно рассматривается без учёта особенностей формирования кристаллов.

Задача намораживания на сферической поверхности может быть подразделена на задачу намораживания на внешней и внутренней сфере (Рис. 1а и Рис. 1б соответственно).

**Математическая модель процесса намораживания**

Процесс намораживания на внешней поверхности сферы (Рис. 1а) описываются следующими дифференциальными уравнениями одномерной нестационарной теплопроводности в сферических координатах:

$$c'_1 \rho_1 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \lambda_1 \left( \frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t_1}{\partial r} \right), \forall r_0 \leq r \leq r_0 + R \quad (1)$$

$$c' \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right), \forall r_0 + R \leq r \leq r_0 + R + \xi, \quad (2)$$

где  $\tau$  - время;  $c'$  - теплоёмкость намороженного слоя;  $\rho$  - плотность намороженного слоя;  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности намороженного слоя;  $t$  - температура намороженного слоя;  $c'_1$  - теплоёмкость материала стенки;  $\rho_1$  - плотность материала стенки;  $\lambda_1$  - коэффициент теплопроводности материала стенки;  $t_1$  - температура стенки;  $r$  - текущая радиальная координата, отсчитываемая от центра сферы;  $r_0$  - внутренний радиус полой сферы;  $R$  - радиальная толщина сферы;  $\xi$  - радиальная толщина намороженного слоя.

Граничные условия:

$$t_1|_{r=r_0} = t_0 \quad (3)$$

$$t_1|_{r=r_0+R+\xi} = t_{кр} \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R+\xi} = \alpha_{ж} (t_{ж} - t_{кр}) + \rho \Gamma \frac{d\xi}{d\tau} \quad (5)$$

где  $t_0$  - температура внутренней поверхности;  $t_{кр}$  - криоскопическая температура;  $\alpha_{ж}$  - коэффициент теплоотдачи со стороны жидкости;  $t_{ж}$  - температура жидкости;  $\Gamma$  - удельная теплота фазового перехода.

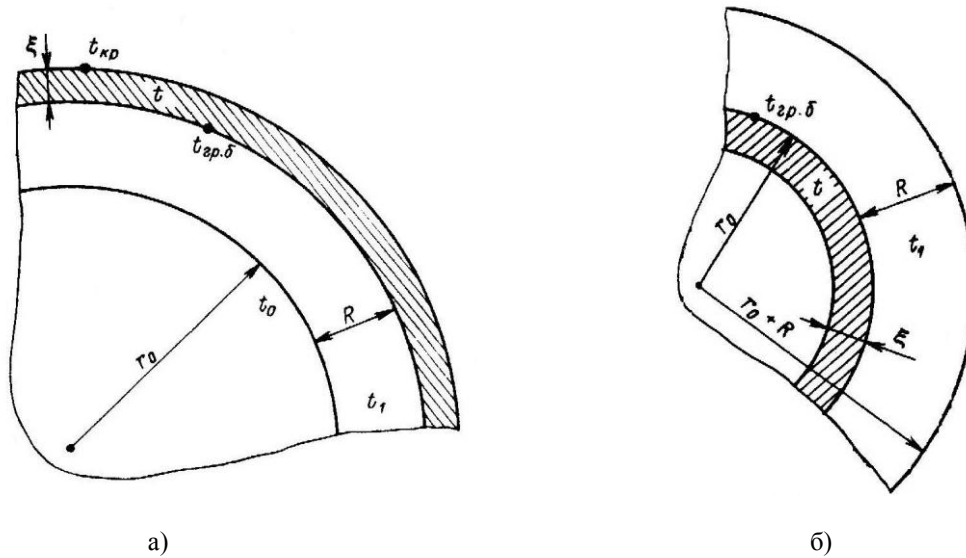
Условия сопряжения:

$$t_1|_{r=r_0+R} = t|_{r=r_0+R} = t_{гр}(\xi) \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R} = \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R} \quad (7)$$

Задача намораживания решается при граничных условиях первого рода на внутренней поверхности ( $r=r_0$ ) и граничных условиях третьего рода на внешней поверхности сферы ( $r=r_0+R+\xi$ ), поскольку эти условия являются наиболее характерными.

Данная задача намораживания на сферической поверхности относится к типу нелинейных задач теплопроводности и не имеет строгого точного аналитического решения.



**Рис. 1.** Схематическое изображение модели для решения задачи о намораживании на внешней (а) и внутренней (б) сферической поверхности

Рассматриваемая задача с подвижными границами в рамках данного исследования решается на основе замещения истинных нестационарных температурных распределений теми распределениями, которые имеют место при стационарной теплопроводности в сферической стенке.

Следует отметить, что существует множество различных методов решения данных задач [1-3]. Довольно эффективными методами могут быть признаны численные методы: метод конечных элементов, метод контрольных объёмов, метод граничных элементов.

В данном исследовании основной целью является отыскание именно аналитических решений.

Вышеуказанный подход, базирующийся на методе замещения, ранее был применён к решению различного типа задач и является вполне обоснованным [1; 4-6].

Следовательно, основным допущением, принятым при решении задачи замораживания на сферической стенке является то, что температура во всех промежутках -  $[r; r_0+R]$  и  $[r; r_0+R+\xi]$  - замещается температурами, получающимися при стационарной одномерной теплопроводности в полой сфере.

В дальнейшем решение задач намораживания получается без дополнительных допущений и в рамках уже принятых допущений может считаться точным аналитическим решением.

**Аналитическое решение задачи о намораживании**

Стационарное распределение температуры в полой сфере при одномерной теплопроводности выглядит следующим образом:

$$t = C_1 - \frac{C_2}{r}, \quad \forall r_0 + R \leq r \leq r_0 + R + \xi \tag{8}$$

$$t_1 = C_3 - \frac{C_4}{r}, \quad \forall r_0 \leq r \leq r_0 + R, \tag{9}$$

где  $C_i, i = 1, 2, 3, 4$  - константы.

Вышеуказанные константы находятся из граничных условий и условий сопряжения. Сначала необходимо составить систему уравнений:

$$t_1|_{r=r_0} = t_0 \Rightarrow t_0 = C_3 - \frac{C_4}{r_0} \tag{10}$$

$$t_1|_{r=r_0+R} = t_{гр} \Rightarrow t_{гр} = C_3 - \frac{C_4}{r_0+R} \tag{11}$$

$$t|_{r=r_0+R} = t_{гр} \Rightarrow t_{гр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0+R} \tag{12}$$

$$t|_{r=r_0+R+\xi} = t_{кр} \Rightarrow t_{кр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0+R+\xi} \tag{13}$$

Вышеуказанные константы получаются из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{гр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0+R} \\ t_{кр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0+R+\xi} \\ t_0 = C_3 - \frac{C_4}{r_0} \\ t_{гр} = C_3 - \frac{C_4}{r_0+R} \end{cases} \tag{14}$$

В развёрнутой форме константы будут выглядеть следующим образом:

$$C_1 = \frac{t_{\text{кр}}(r_0+R+\xi) - t_{\text{гр}}(r_0+R)}{\xi} \quad (15)$$

$$C_2 = -\frac{(r_0+R)(t_{\text{гр}} - t_{\text{кр}})(r_0+R+\xi)}{\xi} \quad (16)$$

$$C_3 = \frac{t_{\text{гр}}(r_0+R) - t_0 r_0}{R} \quad (17)$$

$$C_4 = \frac{r_0(r_0+R)(t_{\text{гр}} - t_0)}{R} \quad (18)$$

Таким образом, стационарное температурное поле в полый сфере будет выжаться следующим образом:

$$t = \frac{t_{\text{кр}}(r_0+R+\xi) - t_{\text{гр}}(r_0+R)}{\xi} + \frac{(r_0+R)(t_{\text{гр}} - t_{\text{кр}})(r_0+R+\xi)}{r\xi}, \forall r_0 + R \leq r \leq r_0 + R + \xi \quad (19)$$

$$t_1 = \frac{t_{\text{гр}}(r_0+R) - t_0 r_0}{R} - \frac{r_0(r_0+R)(t_{\text{гр}} - t_0)}{rR}, \forall r_0 \leq r \leq r_0 + R \quad (20)$$

В дальнейшем следует найти температуру  $t_{\text{гр}}$  из условия сопряжения (7). Производные температур равны:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = -(r_0 + R)(t_{\text{гр}} - t_{\text{кр}}) \frac{(r_0+R+\xi)}{\xi r^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = r_0(r_0 + R) \frac{(t_{\text{гр}} - t_0)}{R r^2} \quad (22)$$

Эти же производные в точке сопряжения равны:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=r_0+R} = -(r_0 + R)(t_{\text{гр}} - t_{\text{кр}}) \frac{(r_0+R+\xi)}{\xi(r_0+R)^2} \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial t_1}{\partial r} \right|_{r=r_0+R} = r_0(r_0 + R) \frac{(t_{\text{гр}} - t_0)}{R(r_0+R)^2} \quad (24)$$

Условие сопряжения (7) для нахождения температуры  $t_{\text{гр}}$ :

$$-\lambda(r_0 + R)(t_{\text{гр}} - t_{\text{кр}}) \frac{(r_0+R+\xi)}{\xi(r_0+R)^2} = \lambda_1 r_0(r_0 + R) \frac{(t_{\text{гр}} - t_0)}{R(r_0+R)^2} \quad (25)$$

Решение (25) даёт температуру  $t_{\text{гр}}$ :

$$t_{\text{гр}} = \frac{t_{\text{кр}} R(r_0+R+\xi)\lambda + t_0 r_0 \xi \lambda_1}{R(r_0+R+\xi)\lambda + r_0 \xi \lambda_1} \quad (26)$$

Самостоятельное значение полученного решения относительно  $t_{\text{гр}}$  заключается в том, что она детерминирует температуру на границе «стенка - замороженный слой» в зависимости от толщины образовавшегося замороженного слоя  $\xi$ .

Продолжительность процесса намораживания  $\tau_{\text{н}}$  слоя толщиной  $\xi$  детерминируется из решения дифференциального уравнения (5) после подстановки в него значений соответствующей производной и значения температуры  $t_{\text{гр}}$  из выражения (26):

$$\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=r_0+R+\xi} = -\lambda(r_0 + R)(t_{\text{гр}} - t_{\text{кр}}) \frac{(r_0+R+\xi)}{\xi r^2} \Big|_{r=r_0+R+\xi} = -\lambda \frac{(r_0+R)(t_{\text{гр}} - t_{\text{кр}})}{\xi(r_0+R+\xi)} \quad (27)$$

После преобразований, решение вышеуказанного дифференциального уравнения относительно продолжительности процесса намораживания  $\tau_{\text{н}}$  слоя толщиной  $\xi$  будет выражаться следующим интегралом:

$$\tau_{\text{н}} = -\rho r \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\frac{\lambda \lambda_1 (t_{\text{кр}} - t_0)(r_0+R)r_0}{(r_0+R+\xi)(R\lambda(r_0+R+\xi) + \xi r_0 \lambda_1)} - \alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}})} \quad (28)$$

После проведения интегрирования и соответствующих преобразований, получим окончательное выражение относительно времени намораживания  $\tau_{\text{н}}$  слоя толщиной  $\xi$ :

$$\tau_{\text{н}} = \frac{\rho r}{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}})} \left( \xi + \frac{2\lambda(t_{\text{кр}} - t_0)\sqrt{\lambda_1 r_0(r_0+R)}}{\sqrt{-\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}})(r_0 \lambda_1 (\alpha_{\text{ж}}(r_0+R)(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}}) + 4\lambda(t_{\text{кр}} - t_0)) + 4R\lambda^2(t_{\text{кр}} - t_0))}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \arctg \left( \frac{(2R\lambda(r_0+R+\xi) + r_0 \lambda_1 (r_0+R+2\xi))\sqrt{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}})}}{\sqrt{-r_0 \lambda_1 (r_0+R)(r_0 \lambda_1 (\alpha_{\text{ж}}(r_0+R)(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}}) + 4\lambda(t_{\text{кр}} - t_0)) + 4R\lambda^2(t_{\text{кр}} - t_0))}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \arctg \left( \frac{\sqrt{(r_0+R)(2R\lambda + r_0 \lambda_1)}\sqrt{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}})}}{\sqrt{-r_0 \lambda_1 (r_0+R)(r_0 \lambda_1 (\alpha_{\text{ж}}(r_0+R)(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}}) + 4\lambda(t_{\text{кр}} - t_0)) + 4R\lambda^2(t_{\text{кр}} - t_0))}} \right) \right] \right) \quad (29)$$

Последнее выражение является точным аналитическим решением квазистационарной задачи о намораживании (задачи Стефана) на сферической поверхности в рамках принятых допущений. Следует отметить, что в рамках принятых допущений можно получить точные аналитические решения задачи намораживания на плоской стенке, а на цилиндрической стенке - только приближённые [1], замкнутого решения авторам получить не удалось. Можно сделать небезосновательное предположение, что точные соответствующие решения данной задачи на цилиндрической стенке могут быть получены, например, при помощи рядов с рекуррентными членами, как, например, при решении интегральных уравнений для обратных задач теплопроводности.

Полученное в работе замкнутое точное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании (задачи Стефана) на внешней сферической поверхности устанавливает непосредственную зависимость между продолжительностью намораживания и толщиной замороженного слоя в зависимости от геометрических и режимных параметров.

Данный подход может быть применён для точного аналитического решения квазистационарной задачи о намораживании на внутренней сферической поверхности (Рис. 1б). Опуская математические выкладки, приведём лишь конечную зависимость:

$$\tau_n = \frac{\rho r}{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}})} \times \quad (30)$$

$$\times \left( \xi - \frac{2(t_{\text{кр}} - t_0)\sqrt{\lambda_1 r_0(r_0 + R)}}{\sqrt{-\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}}) \left( \frac{\alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} r_0^2 \lambda_1 + \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} R r_0 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} r_0^2 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} R r_0 \lambda_1 -}{-4 t_{\text{кр}} r_0 \lambda_1 + 4 r_0 \lambda_1 t_0 + 4 t_{\text{кр}} R \lambda + 4 \lambda_1 t_0 R - 4 t_0 R \lambda - 4 t_{\text{кр}} \lambda_1 R} \right)}} \right) \times$$

$$\times \left[ \arctg \left( \frac{(2 r_0 \lambda_1 \xi - 2 R \lambda \xi - r_0 \lambda_1 R + 2 \lambda R r_0 + 2 \xi \lambda_1 R - r_0^2 \lambda_1) \sqrt{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}})}}{\sqrt{-r_0 \lambda_1 (r_0 + R) \left( \frac{\alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} r_0^2 \lambda_1 + \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} R r_0 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} r_0^2 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} R r_0 \lambda_1 -}{-4 t_{\text{кр}} r_0 \lambda_1 + 4 r_0 \lambda_1 t_0 + 4 t_{\text{кр}} R \lambda + 4 \lambda_1 t_0 R - 4 t_0 R \lambda - 4 t_{\text{кр}} \lambda_1 R} \right)}} \right) - \right.$$

$$\left. - \arctg \left( \frac{(\lambda_1 R - 2 R \lambda + r_0 \lambda_1) \sqrt{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{кр}}) r_0}}{\sqrt{-\lambda_1 (r_0 + R) \left( \frac{\alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} r_0^2 \lambda_1 + \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} R r_0 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} r_0^2 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} R r_0 \lambda_1 -}{-4 t_{\text{кр}} r_0 \lambda_1 + 4 r_0 \lambda_1 t_0 + 4 t_{\text{кр}} R \lambda + 4 \lambda_1 t_0 R - 4 t_0 R \lambda - 4 t_{\text{кр}} \lambda_1 R} \right)}} \right) \right]$$

В работе [Там же] показано, что при прочих равных условиях толщина намороженного слоя больше на цилиндрической поверхности, чем на плоской.

Сравнительные расчёты по полученному в исследовании решению показывают, что при прочих равных условиях толщина намороженного слоя на внешней сферической поверхности больше, чем для плоской и цилиндрической (внешней) поверхностях; иными словами, время намораживания наперёд заданной толщины намороженного слоя для сферической поверхности будет меньше.

При намораживании на внутренней сферической поверхности вышеуказанная толщина будет больше чем на внешней при прочих равных условиях.

Аналогичным образом были получены точные аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании на внешней и внутренней сферической поверхности, когда на внутренней поверхности имеет место граничное условие третьего рода, однако, решение и окончательные выражения для зависимости времени намораживания слоя определённой толщины очень громоздки и выходят за рамки данной статьи, что связано с необходимостью детерминирования не одной, а двух температур на границах. Эти решения переходят в решения, полученные в данной работе, при условии  $t_n = t_0$ ;  $\alpha_0 \rightarrow \infty$  ( $t_n$  - температура стенки со стороны холодильного агента), что является дополнительным доказательством их правильности.

#### Основные выводы

В рамках данной работы получено точное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании на внешней и внутренней сферической поверхности с граничными условиями первого рода на внутренней поверхности и граничными условиями третьего рода на внешней поверхности.

#### Список литературы

1. **Барабанные морозильные аппараты** / Н. В. Фомин, Б. М. Менин, В. Б. Ржевская, Э. И. Гуйго. Л.: Машиностроение (Ленинградское отделение), 1986. 160 с.
2. **Задача о промерзании жидкости, натекающей на плоскую стенку** / М. А. Макаров, В. А. Леонов, В. И. Дубовик, Г. Н. Шведова // Инженерно-физический журнал. 1971. Т. XXI. № 3. С. 537-546.
3. **Юшков П. П., Гейнц Р. Г.** О продолжительности промерзания пластины // Инженерно-физический журнал. 1967. Т. XIV. № 4. С. 460-464.
4. **Plank R.** Die Gefriedanen von Eisblocken // Zeitschrift für die gesamte Kälte Industrie. 1-13. № 6. S. 110-114.
5. **Stefan I.** Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere // Math. Naturw. 1889. Bd. 98. № 11a. S. 965-983.
6. **Stefan I.** Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitungssitzungsber // Math. Naturw. 1889. Bd. 98. № 11a. S. 473-484.

УДК 51-7

Елена Владимировна Назарова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ®

В работе [1] рассматривается задача о выборе оптимального дневного набора продуктов по витаминному составу при определенном суточном бюджете.