Филиппенко Виктор Игнатьевич
КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЧЕТНОГО НАБОРА КОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОНЕЧНОКРАТНЫМ СОВМЕСТНЫМ СПЕКТРОМ
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2011/2/16.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2011. № 2 (45). C. 52-54. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2011/2/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

На анодном пятне угольной дуги с малой плотностью тока около 40 А/см^2 так же была обнаружена сетчатая микроструктура [3]. Если ток повышать таким образом, что его плотность на аноде из-за ограниченности его размеров начинает возрастать, то дуга становится неустойчивой и начинает шипеть. Напряжение на аноде резко снижается. В анодной области появляются движущиеся микропятна, плотность тока в которых оценивается $5 \cdot 10^4$ А/см^2.

Приведенные экспериментальные данные подтверждают положение электродинамической вихревой модели дуги о том, что ток дуги течет через ячейки микронеровности катода и анода. Дискретная структура электродных пятен наблюдается в разных типах электрического разряда и является фундаментальным свойством электрической дуги. При возбуждении дуги формируется электронный вихревой токопроводящий канал, состоящий из множества отдельных вихревых нитей, который замыкает анодное и катодное пятна. При этом образуется единая взаимосвязанная система, состоящая из электродных пятен и столба дуги и которая является основным источником тепла при сварке электрической дугой.

Список литературы

1. **Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю.** Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1978. 225 с.
2. **Кесаев И. Г.** Катодные процессы электрической дуги. М.: Наука, 1968. 244 с.
3. **Мазель А. Г.** Технологические свойства электрической дуги. М.: Машиностроение, 1969. 178 с.
4. **Месяц Г. А.** Эктоны. Екатеринбург: УИФ; Наука, 1994. Ч. 2. 249 с.
5. **Немова Т. Н., Степанов А. П.** Вихревой механизм возбуждения электрической сварочной дуги // Сварочное производство. 2008. № 6. С. 20-24.
6. **Норин П. А., Малышев Н. И.** Структура, геометрические и физические характеристики катодного пятна открытой сварочной дуги // Там же. 2001. № 9. С. 3-5.

УДК 517.98

Виктор Игнатьевич Филиппенко
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЧЕТНОГО НАБОРА КОММУТИРУЮЩИХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОНЕЧНОКРАТНЫМ СОВМЕСТНЫМ СПЕКТРОМ©

В связи с исследованиями квантованных полей в конструктивных теориях и статистических систем при осуществлении предельного термодинамического перехода в последние годы значительно возрос интерес к анализу функций бесконечного числа переменных (см., например, [1]). Изучение системы коммутирующих самосопряженных операторов (КСО) с простым спектром [2] позволяет рассматривать важную в физических приложениях теорию представлений алгебры локальных наблюдаемых одномерной квантовой спиновой системы со счетным числом степеней свободы.

В настоящей заметке рассматриваются наборы КСО с совместным конечнократным спектром.

Обозначения: N - множество всех натуральных чисел; R - множество вещественных чисел; C - множество комплексных чисел.

1. Пусть A - счетный набор самосопряженных операторов $A_p\left(p\in N\right)$, действующих в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что соответствующие операторам $A_p\left(p\in N\right)$ разложения единицы $E_p(\ )$, $\ \in R$ коммутируют. В этом случае операторы $A_p\left(p\in N\right)$ считают коммутирующими.

Пусть $R^\infty := R\times R\times\cdots$. Набору КСО A можно поставить в соответствие разложение единицы - операторнозначную меру $\mathrm{B}\left(R^\infty\right)\ni B\mapsto E(B)$, где $\mathrm{B}\left(R^\infty\right)$ - -алгебра борелевских подмножеств из $R^\infty := R\times R\times\cdots$, совпадающая с -оболочкой всех цилиндрических множеств из множества $R^\infty := R\times R\times\cdots$ [Там же]. Операторнозначная функция множеств $\mathrm{B}\left(R^\infty\right)\ni B\mapsto E(B)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\forall B\in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$ $E(B)$ - проектор в гильбертовом пространстве H, $E(B)$ на пустом множестве есть 0-оператор, а на $R^\infty := R\times R\times\cdots$ - тождественный оператор в гильбертовом пространстве H;

© Филиппенко В. И., 2011

б) выполняется свойство счетной аддитивности: если $B_j \in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$ попарно не пересекаются, то $E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(B_j\right)$, где ряд в правой части равенства сходится в сильном смысле;

в) выполняется свойство ортогональности: для любых $B', B'' \in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$

$E\left(B' \cap B''\right) = E\left(B'\right) E\left(B''\right)$.

Пусть $R^\infty \ni \ \mapsto F(\ _1,\ _2,\cdots,\ _n,\cdots) \in C$ измеримая по Борелю почти везде относительно меры E конечная функция. Оператор

$$F\left(A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\right) = \int_{R^\infty} F(\ )\, dE_{\ _1,\ _2,\cdots}$$

называется функцией от операторов $A_1, A_2, \cdots$ с областью определения

$$D\left(F\left(A_1, A_2, \cdots\right)\right) = \left\{ f \in H \left| \int_{R^\infty} \left|F(\ )\right|^2 d\left(Ef, f\right)_H < \infty \right. \right\}.$$

Поскольку среди функций операторов $A_1, A_2, \cdots$ находятся и сами эти операторы, то все они являются функциями одного самосопряженного оператора [3]. Следовательно, всякий набор КСО А есть семейство функций одного самосопряженного оператора.

Подпространство $H' \subset H$ называется инвариантным относительно набора КСО А, если оно инвариантно относительно каждого из операторов $A_p, p \in N$, составляющих набор А. Наименьшее инвариантное для набора А подпространство, содержащее вектор h, называется циклическим относительно набора А подпространством с порождающим элементом h и кратко обозначается $H(h)$. Набор КСО А называется циклическим, если все пространство H является для него циклическим, то есть, если существует такой элемент h, что $H(h) = H$. Для циклического набора КСО можно построить каноническое представление в некотором функциональном гильбертовом пространстве [2]. Наша цель - дать каноническое представление набора КСО А с конечнократным совместным спектром.

2. Определение. Пусть $\left(\ _{ij}\right), 1 \le i, j \le n$ - матрица-функция, элементы которой определены на $\mathrm{B}\left(R^\infty\right)$. $\left(\ _{ij}\right)$ будем называть положительной $(n \times n)$-матричной мерой на множестве R^∞, если:

1) матрица $\left(\ _{ij}(B)\right)$ является эрмитовой и положительно определенной для каждого борелевского множества $B \in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$;

2) для каждой последовательности попарно непересекающихся борелевских подмножеств на множестве R^∞ выполняется свойство счетной аддитивности, то есть $\ _{ij}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\ _{ij}\left(B_k\right)$, если $B_k \in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$ попарно не пересекаются.

Пусть $\left(\ _{ij}(B)\right)$ - положительная матричная мера, элементы $\ _{ij}$ которой абсолютно непрерывны относительно некоторой вероятностной меры . $(n \times n)$-матрица-функция $\left(m_{ij}\right), ij = 1, \cdots n$ называется матрицей плотностей, если она определяется уравнениями $\ _{ij}(B) = \int_B m_{ij}(\ _1,\ _2,\cdots)\, d\ (B),\ i, j = 1, 2, \cdots, n$, где $B \in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$.

Если $\left(m_{ij}\right)$ - матрица плотностей для матричной меры $\left(\ _{ij}(B)\right)$ относительно , то пространство наборов из n измеримых по Борелю функций $F = \left(F_1, \cdots, F_n\right)$ определенных на множестве R^∞, для которых

$$|F|^2 := \int_{R^\infty} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(\ ) F_i(\ ) \overline{F_j(\ )} \right\} d\ (B) < \infty$$

обозначим через $L_2^0\left(\left(\ _{ij}\right)\right)$. Элемент $F \in L_2^0\left(\left(\ _{ij}\right)\right)$ будем называть $\left(\ _{ij}\right)$- нулевой вектор-функцией, если $|F| = 0$. Пусть $L_2\left(\left(\ _{ij}\right)\right)$ множество всех классов эквивалентности пространства $L_2^0\left(\left(\ _{ij}\right)\right)$ по модулю $\left(\ _{ij}\right)$- нулевых вектор-функций.

Если F и G принадлежат $L_2^0\left(\left(\ _{ij}\right)\right)$, то можно рассматривать их значения $\left(F_1,\cdots,F_n\right)$ и $\left(G_1,\cdots,G_n\right)$ для каждого фиксированного $\ =\left(\ _1,\ _2,\cdots\right)$ как элементы n- мерного евклидова пространства R^n. Применяя неравенство Коши-Буняковского для квазискалярного произведения $\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\left(\ \right)\ _i\ \overline{\ _j}$ получим неравенство

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\left(\ \right)F_i\overline{G_j}\right| \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\left(\ \right)F_i\overline{F_j}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\left(\ \right)G_i\overline{G_j}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для почти всех в смысле -меры $\ =\left(\ _1,\ _2,\cdots\right)$. Следовательно, существует скалярное произведение

$$\left(F,G\right) := \int_{R^\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\left(\ _1,\ _2,\cdots\right)F_i\left(\ _1,\ _2,\cdots\right)\overline{G_j\left(\ _1,\ _2,\cdots\right)}\right)d\ \left(B\right) \tag{1}$$

и выполняется неравенство $\left|\left(F,G\right)\right| \le \left|F\right|\cdot\left|G\right|$.

Пространство $L_2\left(\left(\ _{ij}\right)\right)$ - гильбертово пространство с положительно определенным эрмитовым скалярным произведением, заданным формулой (1).

3. Векторы $x_1, x_2, \cdots, x_n$ будем называть порождающим базисом для КСО A, если линейная оболочка множества векторов $E\left(B\right)x_k, k=1,\cdots,n$ плотна в H, где B пробегает совокупность всех борелевских множеств $\mathrm{B}\left(R^\infty\right)$. $Supp\,E$ называют совместным спектром набора A. Совместный спектр набора КСО называют n-кратным, если n есть минимальное число векторов, образующих порождающий базис; такой базис называют минимальным порождающим базисом.

Лемма. Пусть набор КСО A имеет n-кратный совместный спектр и пусть X - порождающее подпространство, то есть подпространство, натянутое на минимальный порождающий базис. Если элементы набора коммутирующих операторов A_0 определены лишь на линейной оболочке элементов множества $E\left(B\right)X$, ($B \in \mathrm{B}\left(R^\infty\right)$), то операторы набора A есть замыкания соответствующих операторов набора A_0.

Доказательство леммы построим следующим образом. Введем набор операторов $\mathrm{A}_0 := \left(A_1^0, A_2^0, \cdots\right)$, указанный в условии леммы. Все соотношения $\overline{A_p^0} \subseteq A_p, p=1,2,\cdots$ - очевидны. Докажем, что $A_p \subseteq \overline{A_p^0}, p=1,2,\cdots$. Для этого возьмем вектор $f \in D\left(A_p\right)$ и положим $f_k = E\left(B_k\right)f$ $\left(k=1,2,\cdots\right)$, где $\left(B_k\right)$ - возрастающая последовательность борелевских множеств $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$. Так как X есть порождающее подпространство, то замкнутая линейная оболочка множества $\left\{E\left(B'\right)X\right\}$, где B' пробегает все борелевские подмножества борелевского множества B, совпадает с $E\left(B\right)H$. Поэтому векторы f_k принадлежат $D\left(A_p^0\right)$ и $A_p^0 f_k = A_p E\left(B_k\right)f = E\left(B_k\right)A_p f$. Если $k \to \infty$, то $E\left(B_k\right)f \to f$ и $E\left(B_k\right)A_p f \to A_p f$. Поэтому вектор f принадлежит области определения оператора $\overline{A_p^0}$ и $\overline{A_p^0} f = A_p f$, то есть включения $A_p \subseteq \overline{A_p^0}, p=1,2,\cdots$ доказаны.

Теорема. Пусть A - счетный набор КСО в гильбертовом пространстве H с n- кратным совместным спектром, $E\left(\cdot\right)$ - соответствующая ему проекторнозначная мера, а $x_1, x_2, \cdots, x_n$- минимальный порождающий базис. Положим

$$\ _{jk}\left(\cdot\right) := \left(E\left(\cdot\right)x_j, x_k\right),\quad j,k=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

Тогда существует изометрическое отображение пространства H на пространство $L_2\left(\left(\ _{jk}\right)\right)$, при котором элементу $A_p f$ $\left(p=1,2,\cdots\right)$ соответствует вектор-функция $\ _pF\left(\ _1,\ _2,\cdots\right)$, если элементу $f \in H$ соответствует вектор-функция $F \in L_2\left(\left(\ _{jk}\right)\right)$. Мера $\left(\ _{jk}\left(\cdot\right)\right)$ определяется с точностью до эквивалентности.

Список литературы

1. **Ахиезер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 196. 544 с.
2. **Березанский Ю. М.** Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. Киев: Наукова думка, 1978. 360 с.
3. **Филиппенко В. И.** О счетных наборах коммутирующих самосопряженных операторов с конечнократным совместным спектром // Функциональный анализ. Линейные пространства. Ульяновск, 1990. С. 133-139.