УДК 514.75

Валентин Геннадьевич Шармин, Тамара Николаевна Шармина
Тюменский государственный университет

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ В 4-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ©

В работе [1] выяснено, что устойчивую огибающую имеет r-параметрическое семейство двумерных поверхностей в (n+1)-мерном евклидовом пространстве при r = n-2, r = n-1 и r = n . В данной статье будут получены достаточные условия существования устойчивой огибающей однопараметрического семейства двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве.

Огибающая однопараметрического семейства двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве будет являться кривой [Там же].

Приведем следующее определение.

Определение. Участком огибающей однопараметрического семейства поверхностей

$$\vec{r}(u,v,\ \ ) \in C^1 \tag{1}$$

называется регулярная кривая

$$\vec{\ }(\ \ ) = \vec{r}(u(\ \ ), v(\ \ ),\ (\ \ )) \in C^1, \tag{2}$$

для которой при некотором законе прикрепления

$$u = u(\ \ ), v = v(\ \ ),\ \ =\ (\ \ )) \in C^1 \tag{3}$$

выполняются условия:

1. при каждом значении параметра   кривая касается одной из поверхностей семейства;
2. $(\ \ ) \neq const$ ни на одном из промежутков изменения .

Теорема 1. Пусть некоторое семейство поверхностей в E^4 имеет гладкость C^2

$$\vec{r}(u,v,\ \ ) = (x(u,v,\ \ ), y(u,v,\ \ ), z(u,v,\ \ ), t(u,v,\ \ )) \in C^2, \tag{4}$$

$a < u < b, c < v < d,\ _1 < \ < \ _2$ и в точке $(u_0, v_0,\ _0)$ выполнены условия:

$$f = \frac{D(x,y,t)}{D(u,v,\ \ )} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}\ , \vec{k}) = 0; g = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\ \ )} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}\ , \vec{s}) = 0; \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0; \tag{6}$$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{7}$$

$$\left|\frac{D(f,g,x)}{D(u,v,\ \ )}\right| + \left|\frac{D(f,g,y)}{D(u,v,\ \ )}\right| + \left|\frac{D(f,g,z)}{D(u,v,\ \ )}\right| + \left|\frac{D(f,g,t)}{D(u,v,\ \ )}\right| \neq 0 \tag{8}$$

Тогда при ограничении в семействе (4) области изменения параметров некоторой окрестностью точки $(u_0, v_0,\ _0)$ ($a_0 < u < b_0, c_0 < v < d_0,\ _{1_0} < \ < \ _{2_0}$) будут выполнены утверждения:

1. Огибающая существует и задается в форме $\vec{r}(u,v,\ \ )$ при связи $f(u,v,\ \ ) = 0, g(u,v,\ \ ) = 0.$ На этой огибающей в качестве внутренних параметров можно ввести , причем закон прикрепления $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$ будут функциями класса C^1. Точке φ_0 отвечает (u_0, v_0).
2. Вектор, координатами которого являются якобианы из (8), есть касательный вектор к огибающей.
3. Каждая из поверхностей семейства касается огибающей в единственной точке.
4. Огибающая и закон прикрепления единственны (с точностью до замены параметров).

Замечание. Векторы $\vec{k}$ и $\vec{s}$ - орты осей *Oz* и *Ot* соответственно. Эти векторы выбраны, поскольку из (6) следует, что каждая поверхность семейства в окрестности точки $(u_0, v_0,\ _0)$ однозначно проектируется на плоскость *XOY* в направлении плоскости *ZOT*.

Доказательство. По теореме о неявных функциях из (7) следует, что

$$u = u(\ \ ), v = v(\ \ ). \tag{9}$$

Подставив (9) в (4), получим

$$\vec{\ }(\ \ ) = \vec{r}(u(\ \ ), v(\ \ ),\ \ ) \in C^1. \tag{10}$$

Продифференцируем (10)

$$\vec{\ }'(\ ) = \vec{r}_u \cdot \frac{\partial u}{\partial} + \vec{r}_v \cdot \frac{\partial v}{\partial} + \vec{r}\ . \qquad (11)$$

Докажем, что вектор (11) отличен от нулевого. Продифференцируем функции f и g . Получим

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial} + \frac{\partial f}{\partial} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial} + \frac{\partial g}{\partial} = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Из (12) получим

$$\frac{\partial u}{\partial} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}}, \frac{\partial v}{\partial} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}}. \qquad (13)$$

Векторы $\vec{\ }'(\ )$ и $\vec{\ }'(\ ) \cdot H$ коллинеарны. Из (7), (11) и (13) следует, что $\vec{\ }'(\ ) \cdot H$ имеет координаты

$$\left(\frac{D(f,g,x)}{D(u,v,\ )}, \frac{D(f,g,y)}{D(u,v,\ )}, \frac{D(f,g,z)}{D(u,v,\ )}, \frac{D(f,g,t)}{D(u,v,\ )}\right). \qquad (14)$$

Тогда из (8) следует, что кривая, заданная уравнением (10) является регулярной.

Покажем, что касательная прямая к кривой (10) лежит в касательной плоскости к поверхности (4). Из (5) и (6) получаем

$$\vec{r}\ = A \cdot \vec{r}_u + B \cdot \vec{r}_v. \qquad (15)$$

Таким образом, доказано, что кривая (10) является участком огибающей, удовлетворяющей условиям 1 и 2 теоремы.

Докажем, что каждая из поверхностей семейства (4) касается огибающей (10) в единственной точке. Предположим противное. Пусть в точке кривой $\vec{\ }(\ ')$, кроме поверхности $\vec{r}(u,v,\ ')$ другая поверхность семейства $\vec{r}(u,v,\ '')$ касается огибающей. Пользуясь методами из [1] и [2], получим

$$\begin{aligned} &\vec{r}\ = A \cdot \vec{r}_u + B \cdot \vec{r}_v; \\ &\vec{r}_u\ = A \cdot \vec{r}_{uu} + B \cdot \vec{r}_{uv}; \\ &\vec{r}_v\ = A \cdot \vec{r}_{vu} + B \cdot \vec{r}_{vv}. \end{aligned} \qquad (16)$$

Найдем

$$f_u = (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}\ , \vec{k})_u = (\vec{r}_{uu}, \vec{r}_v, \vec{r}\ , \vec{k}) + (\vec{r}_u, \vec{r}_{uv}, \vec{r}\ , \vec{k}) + (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{\ u}, \vec{k}) =$$

$$A(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_v, \vec{r}_u, \vec{k}) + B(\vec{r}_u, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_v, \vec{k}) + A(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}, \vec{k}) + B(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vu}, \vec{k}) = 0,$$

$$f_v = 0, g_u = 0, g_v = 0.$$

Последнее противоречит (7).

Докажем пункт 4. Допустим, что через точку $\vec{r}(u_0, v_0,\ _0) = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ проходят две огибающие кривые, которым в этой точке по их законам прикрепления соотнесены именно $(u_0, v_0,\ _0)$. Докажем, что эти огибающие и их законы прикрепления после удачного выбора параметров на огибающих совпадут.

Обе огибающие регулярные кривые, имеющие в рассматриваемой точке общую касательную. Допустим, что у направляющего вектора касательной отлична от нуля первая координата. Это позволяет на каждой из огибающих локально выбрать x в качестве параметра. После этого огибающие и законы их прикрепления примут некоторый вид

$$\begin{aligned} &\vec{\ }(x); u(x); v(x);\ \ (x)(\in C^0); \\ &\vec{\ }^{*}(x); u^*(x); v^*(x);\ \ ^*(x)(\in C^0). \end{aligned} \qquad (17)$$

Из предположения, что у направляющего вектора касательной отлична от нуля составляющая по оси x, следует

$$\frac{D(f,g,x)}{D(u,v,\ )} = 0. \qquad (18)$$

Поэтому уравнения, которым должны тождественно удовлетворять как функции $u(x); v(x);\ (x)$, так и функции $u^*(x); v^*(x);\ ^*(x)$

$$f(u,v,\ )=0, g(u,v,\ )=0, x(u,v,\ )=x \qquad (19)$$

в окрестности точки $(u_0, v_0,\ _0)$ однозначно разрешимы относительно u,v и φ в виде функций класса C^1. Это влечет

$$u(x)=u^*(x)\in C^1; v(x)=v^*(x)\in C^1;\ (x)=\ ^*(x)\in C^1$$

Из совпадения законов прикрепления следует $\vec{\ }(x)=\vec{\ }^*(x)$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. **Залгаллер В. А.** Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 104 с.
2. **Шармин В. Г.** Достаточные условия существования огибающей n-параметрического семейства кривых в (n+1)-мерном евклидовом пространстве, содержащей регулярную (n-1)-поверхность особых точек // Альманах современной науки и образования: научно-теоретический и прикладной журнал широкого профиля. Тамбов: Грамота, 2009. № 6 (25).
3. **Шармин В. Г.** Огибающая n-параметрического семейства кривых в (n+1)-мерном евклидовом пространстве // Математика и информатика. Наука и образование: межвузовский сборник научных трудов: ежегодник. Омск, 2006. Вып 5.