останется граф с семью вершинами, степени которых не совпадут. Но такого графа не существует (см. Задачу 3). Значит, это предположение неверно.

Теперь допустим, что существует граф с девятью вершинами, в котором ровно две вершины имеют степень 8, а все остальные - несовпадающие степени. Тогда в дополнении данного графа ровно две вершины будут иметь степень 0, а остальные - попарно различные степени. Этого тоже не может быть (см. Задачу 3), то есть и второе предположение неверно.

Следовательно, у графа с девятью вершинами, из которых в точности две имеют одинаковую степень, всегда найдется либо одна изолированная вершина, либо одна вершина степени 8.

Вернемся к задаче. Как и требовалось доказать, среди рассмотренных девяти игроков либо только один еще не сыграл ни одной партии, либо только один сыграл все партии. При решении этой задачи число 9 можно заменить любым другим натуральным числом $n > 2$.

Вывод. Если в графе с n вершинами $(n > 2)$ в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n-1$.

УДК 519.6

Нина Ивановна Костюкова
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

ПАРОСОЧЕТАНИЯ И СВАДЬБЫ©

Теорема Холла о свадьбах

Теорема о свадьбах, доказанная Филиппом Холлом в 1935 г., отвечает на следующий вопрос, известный под названием *задачи о свадьбах*: рассмотрим некоторое конечное множество юношей, каждый из которых знаком с несколькими девушками; спрашивается, **при каких условиях можно женить юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке**? (Будем считать, что полигамия не разрешена.) Например, если имеется четверо юношей $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ и пять девушек $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, а отношения знакомства между ними показаны в Табл. 1, то возможно следующее решение: b_1 женится на g_4, b_2 - на g_1, b_3 - g_3, а b_4 - на g_2.Эту задачу можно представить графически, взяв двудольный граф G с множеством вершин, разделенных на два непересекающихся подмножества V_1, V_2, представляющих юношей и девушек, соответственно, и соединив ребром каждого юношу со знакомой ему девушкой.

Табл. 1

Юноша	Девушки, с которыми знаком юноша		
b_1	g_1	g_4	g_5
b_2	g_1		
b_3	g_2	g_3	g_4
b_4	g_2	g_4	

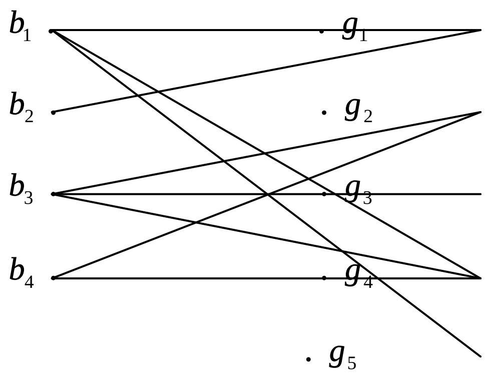

Рис. 1

Напомним определение двудольного графа. Допустим, что множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, что каждое ребро в G соединяет какую-нибудь вершину из V_1 с какой-либо вершиной из V_2, тогда G называем *двудольным графом*. Такие графы иногда обозначают $G(V_1,V_2)$, если хотят выделить два указанных подмножества. Двудольный граф можно определить и по-другому в терминах раскраски его вершин двумя цветами, скажем, красным и синим. При этом граф называется двудольным, если каждую его вершину можно окрасить красным или синим цветом так, чтобы любое ребро имело один конец красный, а другой - синий. Следует подчеркнуть, что в двудольном графе совсем не обязательно каждая вершина из V_1 соединена с каждой вершиной из V_2; если же это так и если при этом граф G, простой, то он называется *полным двудольным графом* и обычно обозначается $K_{m,n}$, где m,n - число вершин, соответственно, в V_1 и V_2.

Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2 в *двудольном графе* $G(V_1,V_2)$ называется взаимно однозначное соответствие между вершинами из V_1 и подмножеством вершин из V_2, обладающее тем свойством, что соответствующие вершины соединены ребром. Ясно, что задачу о свадьбах можно выразить в терминах теории графов следующим образом: если $G=G(V_1,V_2)$ - двудольный граф, то при каких условиях в G существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2?

Используя прежнюю «матримониальную» терминологию, можно сформулировать следующее очевидное утверждение: необходимое условие для существования решения в задаче о свадьбах в том, что любые k юношей из данного множества должны быть знакомы (в совокупности), по меньшей мере, с k девушками (для всех целых k, удовлетворяющих неравенствам $1 \le k \le m$, где через m обозначено общее число юношей). Необходимость этого условия сразу вытекает из того, что если оно не верно для какого-нибудь множества юношей, то мы не сможем женить требуемым способом даже этих k юношей, не говоря уже об остальных.

Поразительно, что это очевидное необходимое условие является в то же время и достаточным. В этом и состоит **теорема Холла о свадьбах**; ввиду ее важности мы приведем три доказательства. Первое из них принадлежит **Халмошу и Вогену**.

Теорема (Ф. Холл, 1935). Решение задачи о свадьбах существует тогда и только тогда, если любые k юношей из данного множества знакомы в совокупности по меньшей мере с k девушками $(1 \le k \le m)$.

Доказательство. Как было отмечено выше, необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности воспользуемся индукцией и допустим, что утверждение справедливо, если число юношей меньше m. (Ясно, что при $m=1$ теорема верна). Предположим теперь, что число юношей равно m, и рассмотрим два возможных случая.

(i) Сначала будем считать, что любые k юношей $(1 \le k \le m)$) в совокупности знакомы по меньшей мере с $k+1$ девушками (т.е. что наше условие всегда выполняется «с одной лишней девушкой»). Тогда, если взять любого юношу и женить его на любой знакомой ему девушке, для других $m-1$ юношей останется верным первоначальное условие. По предположению индукции мы можем женить этих $m-1$ юношей; тем самым доказательство в первом случае завершено.

(ii) Предположим теперь, что имеются k юношей $(k\langle m)$, которые в совокупности знакомы ровно с k девушками. По индуктивному предположению этих k юношей можно женить. Остаются еще $m-k$ юношей, но любые h из них $(1 \le h \le m-k)$ должны быть знакомы, по меньшей мере, с h девушками из оставшихся, поскольку в противном случае эти h юношей вместе с уже выбранными k юношами будут знакомы меньше, чем с $h+k$ девушками, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, для этих

$m-k$ юношей выполнено первоначальное условие, и по предположению индукции мы можем их женить так, чтобы каждый был счастлив. Доказательство теоремы закончено.

Теорему Холла можно также сформулировать на языке паросочетаний в двудольном графе; число элементов множества S обозначается через $|S|$.

Следствие. Пусть $G=G(V_1,V_2)$ - двудольный граф, и для любого подмножества A множества V_1 пусть (A) - множество тех вершин из V_2, которые смежны, по крайней мере, с одной вершиной из A. Тогда совершенное паросочетание из V_1 в V_2 существует в том и только в том случае, если $|A| \le |\ (A)|$ для каждого подмножества A из V_1.

Доказательство. Доказательство этого следствия является просто переводом изложенного выше доказательства на языке теории графов.

Приложение теоремы Холла

Рассмотрим приложения теоремы Холла в различных областях.

Латинские квадраты

Латинским $(m\times n)$ *-прямоугольником* называется $(m\times n)$ -матрица $M=(m_{ij})$, элементами которой являются целые числа, удовлетворяющие условиям (1) $1\le m_{ij}\le n$, (2) все элементы в каждой строке и в каждом столбце различны. Заметим, что из условий (1) и (2) следует, что $m\le n$; если $m=n$, то латинский прямоугольник называется *латинским квадратом*. К примеру, ниже изображены латинский (3×5) -прямоугольник и латинский (5×5) -квадрат. Можно задать следующий вопрос: если дан латинский $(m\times n)$ -прямоугольник, где $m<n$, когда можно присоединить к нему $n-m$ новых строк так, чтобы получился латинский квадрат? Удивительно, что ответ на этот вопрос **«всегда»**!

1 2 3 4 5
2 4 1 5 3
3 5 2 1 4

Рис. 2

1 2 3 4 5
2 4 1 5 3
3 5 2 1 4
4 3 5 2 1
5 1 4 3 2

Рис. 3

Латинские квадраты долгое время были известны лишь математикам и любителям головоломок и, в основном, благодаря одной знаменитой задаче Л. Эйлера. В 1782 г. Эйлер предложил следующую проблему.

Среди 36 офицеров находится по шесть офицеров шести различных званий из шести полков. Можно ли построить этих офицеров в каре так, чтобы в каждой колонне и каждой шеренге встречались офицеры всех званий и всех полков?

Лишь в 1901 г. удалось доказать, что это невозможно. Однако связанные с задачей Эйлера латинские квадраты не потеряли интереса, так как вскоре обнаружилось, что они имеют многообразные практические применения. А в конце 60-х годов двадцатого столетия они были применены в теории кодирования. Получающиеся на их основе коды допускают простые алгоритмы декодирования.

УДК 519.6

Нина Ивановна Костюкова
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

ПОТОКИ В СЕТЯХ©

Деятельность современного общества тесно связана с разного рода сетями - возьмите, к примеру, транспорт, коммуникации, распределение товаров и тому подобное. Поэтому математический анализ таких сетей