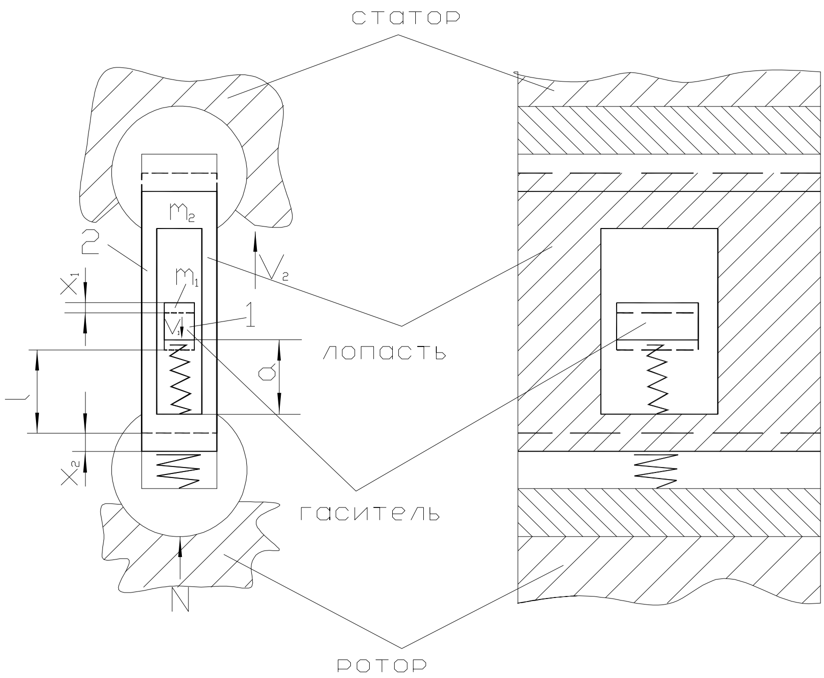

Рис. 1

УДК 621.746

Александр Сергеевич Савинов
Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова

УЧЕТ ТЕПЛОТЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ СТЕНКИ ОТЛИВКИ©

В настоящее время, при современном развитии электровычислительной техники существуют методики расчета температурных полей дающие достаточно хорошую сходимость между экспериментальными и расчетными данными. Одним из таких методов являются разностные схемы, полученные путем решения одномерной задачи теплопроводности [1]. Однако данный математический аппарат не учитывает влияние теплоты кристаллизации на температурное поле объекта, что делает невозможным его использование при расчете затвердевания плоской стенки отливки. Для обеспечения возможности применения разностных схем при прогнозировании температурных полей в интервале $\boldsymbol{T_{пер}}$ **-** $\boldsymbol{T_{кон}}$ (температура перегрева - конечная температура) (Рис. 1), используем следующий прием: для учета теплоты кристаллизации выделяющейся в пределах ликвидус - солидус ($\boldsymbol{T_{ликв}}$ **-** $\boldsymbol{T_{сол}}$), увеличим в данных температурных пределах теплоемкость охлаждаемого материала.

Таким образом, эквивалентную теплоемкость в интервале $T_{ликв}$ - $T_{солид}$ опишем следующим уравнением

$$C_{экв} = C_{ме} + C_{доб}\,, \tag{1}$$

где $C_{экв}$ - эквивалентная удельная теплоемкость в интервале температур $T_{ликв}$-$T_{солид}$;

$C_{ме}$ - удельная теплоемкость металла;

$C_{добав}$ - удельная добавочная теплоемкость.

Действительно, при применении разностных схем расчета тепловых полей стенки отливки, выделяемая теплота кристаллизации может быть заменена добавочной теплоемкостью. Аналогичное решение применялось в работе [7] и показало хорошую сходимость между экспериментальными и расчетными данными.

Учитывая минимальную величину временных и пространственных отрезков при применении разностных схем расчета тепловых полей, в первом приближении, качественное распределение тепла кристаллизации в элементарном объеме металла может быть описано следующей кривой (Рис. 1).

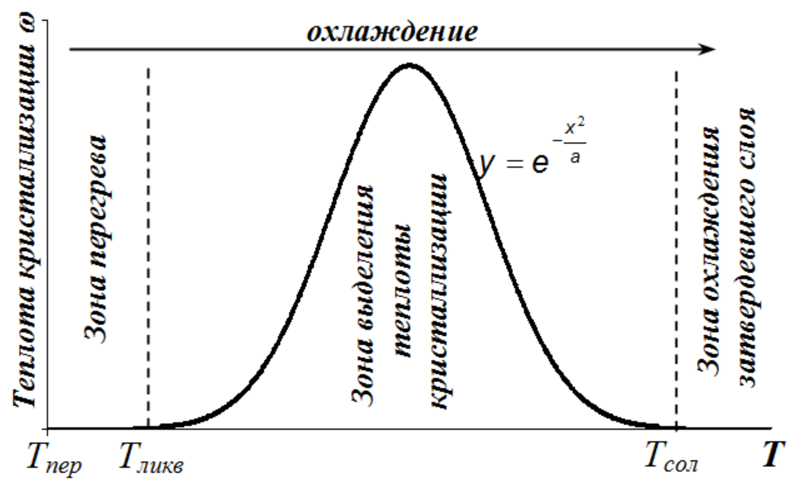

Рис. 1. *Выделение теплоты кристаллизации при охлаждении элементарного объема жидкого металла*

Действительно, на начальном этапе охлаждения стенки при достижении сплавом температуры ликвидус происходит плавное нарастание тепловыделения в металле, которое заканчивается в районе температуры солидус в связи с уменьшением жидкой фазы.

Аналитическое выражение количественного распределения тепла может быть отображено следующей формулой [6]

$$y = e^{-\frac{x^2}{a}} \tag{2}$$

На основании выражения (2) разработана функция добавочной теплоемкости, величина и положение экстремума которой зависят от теплоты кристаллизации металла и значений температур солидус $T_{сол}$ и ликвидус $T_{ликв}$, определяемых по диаграммам состояния сплавов либо по методике, предложенной в источнике [5].

$$C_{доб} = \frac{\Omega \cdot e^{\frac{-\left(T - \frac{T_{ликв} + T_{сол}}{2}\right)^2}{(T_{сол} - T_{ликв})^{2,0055} e^{-3.342 - 3 \cdot 10^{-5}(T_{сол} - T_{ликв})}}}}{0,337 \cdot (T_{сол} - T_{ликв})}, \quad 2,5 \le (T_{ликв} - T_{сол}) \le 333, \tag{3}$$

где T - текущая температура металла;

ω - удельная теплота кристаллизации.

Таким образом, тепло Q, выделившееся при охлаждении стенки отливки в расчете на 1 кг металла, может быть найдено как

$$\int_{T_{кон}}^{T_{пер}} C_{экв} dT = Q \tag{4}$$

или

$$\int_{T_{кон}}^{T_{пер}} C_{ме} dT + \Omega = Q \tag{5}$$

Оценку применимости выражений (1), (3) осуществим на основе соблюдения следующего теплового баланса

$$\int_{T_{кон}}^{T_{пер}} C_{экв} dT = \int_{T_{кон}}^{T_{пер}} C_{ме} dT + \Omega \tag{6}$$

При этом, для проверки равенства (6) рассчитаем тепловыделение при охлаждении 1 кг стали марки Ст20. Температуры ликвидус $T_{ликв}= 1510^oC$ и солидус $T_{сол}=1492^oC$ определили по диаграмме состояния железо-углерод [2]. Величину перегрева примем 30^oC, тогда температура перегрева составит $T_{пер}=1540^oC$. Конечная температура охлаждения $T_{кон}=100^oC$. По данным источника [5] значения удельной теплоты кристаллизации близки к теплоте кристаллизации чистого железа, откуда $\omega=277$ *кДж/кг* [4]. Экспериментальные значения теплоемкости Ст20 при изменении температур отображены на Рис. 2 [10]. По представленным данным, при использовании метода детально описанного в источниках [8; 9], получили функцию (7) описывающую изменение теплоемкости стали в различных температурных условиях.

$$C_{ме}=\left[514,7+3,7\cdot 10^{-7}T^{3}-672\frac{\ln T}{T}\right]\frac{1-\dfrac{e^{0,03(T-750)}-e^{-0,03(T-750)}}{e^{0,03(T-750)}+e^{-0,03(T-750)}}}{2}+$$
$$+\left[568,2+8,2\cdot 10^{-7}T^{2,5}+8,4\cdot 10^{6}\frac{\ln T}{T}\right]\frac{1+\dfrac{e^{0,03(T-750)}-e^{-0,03(T-750)}}{e^{0,03(T-750)}+e^{-0,03(T-750)}}}{2} \quad (7)$$

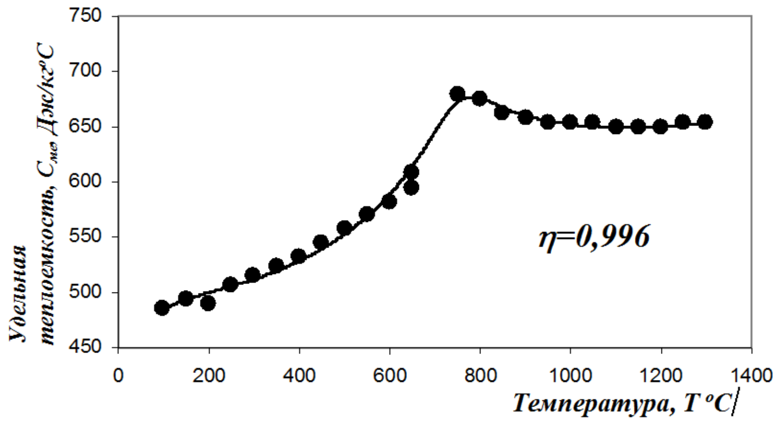

Рис. 2. *Зависимость удельной теплоемкости стали 20 при изменении температуры: • - экспериментальные данные; — - расчетные данные*

Оценку сходимости расчетных и опытных данных осуществляли на основе корреляционного отношения [3] η=0,996. Высокое значение η говорит о возможности применения функции (7) для прогнозирования значений удельной теплоемкости Ст20 в рассматриваемом температурном интервале.

Таким образом, используя формулы (1), (3), (7) запишем выражение эквивалентной теплоемкости как

$$C_{экв}=\left[514,7+3,7\cdot 10^{-7}T^{3}-672\frac{\ln T}{T}\right]\frac{1-\dfrac{e^{0,03(T-750)}-e^{-0,03(T-750)}}{e^{0,03(T-750)}+e^{-0,03(T-750)}}}{2}+\left[568,2+8,2\cdot 10^{-7}T^{2,5}+8,4\cdot 10^{6}\frac{\ln T}{T}\right]\times$$
$$\times\frac{1+\dfrac{e^{0,03(T-750)}-e^{-0,03(T-750)}}{e^{0,03(T-750)}+e^{-0,03(T-750)}}}{2}+\frac{\Omega\cdot e^{\frac{-\left(T-\frac{T_{ликв}+T_{сол}}{2}\right)^{2}}{\left(T_{сол}-T_{ликв}\right)^{2,0055}e^{-3.342-3\cdot 10^{-5}\left(T_{сол}-T_{ликв}\right)}}}}{0,337\cdot\left(T_{сол}-T_{ликв}\right)},\quad 2,5\le\left(T_{ликв}-T_{сол}\right)\le 333 \quad (8)$$

Применив вышеописанные граничные условия, произведем расчет тепловыделения при охлаждении 1 кг стали Ст20. По формуле (5) проинтегрировав выражение (7), получим $Q=\int_{100}^{1540}C_{ме}dT+\Omega=1154,4$ кДж/кг, по формуле (4) интегрируя функцию (8) $Q=\int_{100}^{1540}C_{экв}dT=1153,5$ кДж/кг. Относительное отклонение между двумя значениями теплоты составляет =0,078%.

Такое низкое расхождение позволяет говорить о соблюдении равенства (6), а, следовательно, выражения (1), (3) достаточно точно учитывают тепловыделение при кристаллизации металла и могут быть применены для прогнозирования теплового поля затвердевающего объекта при использовании разностных схем расчета.

Список литературы

1. **Арутюнов В. А., Бухмиров В. В., Крупенников С. А.** Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей: учебник для вузов. М.: Металлургия, 1990. 239 с.
2. **Гуляев А. П.** Металловедение. М.: Металлургия, 1986. 544 с.
3. **Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В.** Теория вероятности и математическая статистика в технике. М.: Гостехиздат, 1956. 656 с.
4. **Енохович А. С.** Краткий справочник по физике. М.: Высшая школа, 1976. С. 114.
5. **Островский О. И., Григорян В. А., Станюкович В. Н. и др.** Теплофизические свойства жидкой стали // Сталь. 1988. № 3. С. 37-39.

6. **Рыбасенко В. Д., Рыбасенко И. Д.** Элементарные функции: формулы, таблицы, графики. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 416 с.
7. **Савинов А. С., Тубольцева А. С., Варламова Д. В.** Расчет теплового поля сырой песчано-глинистой формы // Черные металлы: спецвыпуск, посвященный ГОУ ВПО «МГТУ им. Г. И. Носова». 2011.
8. **Савинов А. С., Тубольцева А. С., Назаренко Д. И.** Моделирование сопротивления деформации материала на примере диаграммы растяжения сплава ХН70ВМТЮ // Современные инструментальные системы, информационные технологии и инновации: материалы VIII Междунар. науч.-техн. конф. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2011. С. 272-276.
9. **Тубольцева А. С.** Определение степенного показателя регламентирующей функции при расчетах деформации сопротивления материала // Образование, наука, производство. Магнитогорск: МГТУ, 2011. Вып. 6. С. 100-102.
10. **http://termist.com/luo/tabl/sw_wa/war_cp.htm**

УДК 510.6

Дмитрий Витальевич Сергеев
Тульский государственный университет

ВЕРИФИКАЦИЯ И СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ФОРМАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ©

Формальная верификация программ - это методы доказательства или опровержения того, что модель системы удовлетворяет заданной формальной спецификации. Для формального доказательства какого-либо утверждения относительно работы реальных систем, анализируемая система должна быть представлена формальной моделью. Эта модель всегда проще самой программы, так как в ней отражаются только существенные характеристики.

Многие программы пишутся на языках высокого уровня с формально определенным синтаксисом. Но несмотря на это они не являются полностью формализованными. Это происходит из-за использования указателей, обработки чисел с ограниченной точностью, динамического порождения потоков и их взаимодействия. Формальную модель можно построить только для реагирующей системы, то есть системы, дающей отклик на внешнее событие в зависимости от своего состояния. Верификация требуемых свойств проводится по формальной модели программы.

Для создания модели работы системы необходимо разработать язык ее описания. Для этого можно использовать различные логические исчисления.

Так при помощи исчисления высказываний можно сложное высказывание составить из простых с использованием логических связок конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквивалентности.

Например, свойства состояния можно записать в виде $A \wedge B \vee C \wedge \overline{A}$, где A, B,C какие-либо простые высказывания. Так для реальной системы можно определить значения и диапазон возможных значений переменных внутри состояния:

$$x = 5 \wedge y < 6 \wedge y > -2 \vee x = 6 \wedge y = 0$$

Использование исчисления предикатов добавляет в исчисление высказываний возможность использования кванторов по объектным переменным для построения новых утверждений. Например, следующая формула накладывает ограничения на значения переменных во всех состояниях:

$$\forall X(x > 2 \wedge x < 20)$$

$$\forall X \exists Y(x > 3 \wedge \mathrm{integrer}(x))$$

где X, Y- множество значений переменных x, y в каждом состояние, а integer(x) проверяет, является ли результат деления x на y целым числом.

Для построения функций из выражений можно использовать λ-исчисление. В λ-исчислении с типами, так же как и в типизированном исчислении предикатов, объекты имеют типы, а функции - сигнатуры.

Так например условие того, что переменная x должна быть больше переменной y не больше чем на 5 можно записать в виде:

$$x > y \wedge \quad x, y(x - y) <= 5$$

В некоторых же случаях необходимо использовать операторы с дополнительной смысловой нагрузкой для более строгого анализа связи между ними. Для этих целей можно использовать модальный логики. Они позволяют строить утверждения типа «переменная x когда-то в будущем должна быть равна 6» или «хотелось бы, чтобы было y=5».

Специальным случаем модальных логик являются временные логики, в которых дополнительные операторы используются для описания временной последовательности событий - «как только x станет равно 3, y должно стать равно 0», «после того, как x станет больше 0, спустя некоторое время y обязательно станет равно 5».