социальных и даже политических интересов. Увеличение тарифов, за счет которых можно было бы решить проблему, заведомо не будет популярным. Поэтому энергетическим компаниям достаточно трудно сделать выбор в пользу автоматизированных средств учета. Тем не менее, успешные результаты внедрения ИТ в коммунальном комплексе имеются и в России. Для дальнейшего развития применения ИТ в коммунальном комплексе необходимо решить ряд в том числе организационных проблем: усилить конкуренцию среди сбытовых компаний, стимулировать потребителей к установке современных счётчиков воды и электроэнергии, сосредоточить зоны ответственности за обслуживание приборов учёта, обработку показаний и выставление счетов по конкретному адресу в «руках» одной сбытовой компании, перевести крупных потребителей и бюджетные организации на систему автоматизированного сбора показаний приборов учёта, ужесточить требования к приборам учёта, планируемых к производству. Это позволит создать базу для масштабного внедрения ИТ в коммунальном секторе, которое в дальнейшем уже будет проводиться собственными силами потребителей, обслуживающих и сбытовых организаций, так как они будут сами заинтересованы во внедрении подобных технологий.

Список литературы

1. **Лукьянец А. А., Чернов А. Г., Шумский А. А. и др.** Основы экономики и управления в коммунальном комплексе. Новосибирск: Изд-во ИЭОПП СО РАН, 2008. 448 с.
2. **Лукьянец А. А., Шумский А. А., Ротарь В. Г., Шелупанов А. А.** Основные направления информатизации управления тарифной и инвестиционной политикой регионального коммунального комплекса // Системы управления и информационные технологии. 2005. № 5 (22). С. 73-78.

УДК 532.546

Эльмира Эсенбековна Маданбекова
Ысык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова, Каракол, Кыргызская Республика

ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ©

Управление уровнем грунтовых вод (УГВ) необходимо для наилучшего обеспечения мелиоративной обстановки в заданной области фильтрации. Для наилучшего обеспечения корнеобитаемого слоя растений влагой необходимо удерживать уровень грунтовых вод (УГВ) на определенной глубине от поверхности земли. На режим грунтовых вод влияют многие факторы, главные из которых - инфильтрация, приток и отток грунтовых вод через границы области фильтрации, а также перетоки из нижележащих напорных водоносных горизонтов через слабопроницаемые прослойки. Мы рассмотрим задачу оптимального управления УГВ с помощью инфильтрации (т.е. функции источников и стоков), установившееся движение подземных вод в многослойном пласте, состоящем из основного хорошо проницаемого напорного горизонта, покрытого малопроницаемой покровной толщей и подстилаемого снизу слабопроницаемой прослойкой, через которую происходит связь с нижележащим водоносным горизонтом в жестком режиме.

Задача оптимального управления УГВ ставится следующим образом [1; 2]. Требуется построить такую управляющую функцию $f(x,y)$, которая доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \iint_D [h(x,y; f(x,y)) - \Phi(x,y)]^2\, dxdy + \iint_D [f(x,y)]^2\, dxdy\,, \qquad (1)$$

где $h(x,y)$ - УГВ; $\Phi(x,y)$ - заданная функция, равная оптимальному УГВ; > 0 — параметр регуляризации; D - область фильтрации.

Функция $f_{опт}(x,y)$, доставляющая минимум функционалу (1), называется оптимальным управлением, а соответствующая ей функция $h_{опт}(x,y)$ — оптимальным УГВ.

При расчетах фильтрации в слоистых водоносных системах обычно используются общие предпосылки перетекания, в которых предполагается, что движение через раздельные относительно малопроницаемые слои происходит только по вертикали, а в хорошо проницаемых слоях - только по горизонтали.

УГВ $h(x,y)$ определяется из следующей системы дифференциальных уравнений, описывающей движение подземных вод в многослойных пластах:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left[k_b(h-b)\dfrac{\partial h}{\partial x}\right]-\dfrac{\partial}{\partial y}\left[k_b(h-b)\dfrac{\partial h}{\partial y}\right]+k_b\dfrac{h-H}{m_b}=f(x,y) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)-k_b\dfrac{h-H}{m_b}+\dfrac{k_n}{m_n}(H-Z)=W(x,y) \end{cases} \tag{2)-(3}$$

$(x,y)\in D,$

с граничными условиями

$$T_b\frac{\partial h}{\partial n}+\ _b h=\ _b \tag{4}$$

$$T\frac{\partial H}{\partial n}+\ H=\ ,\quad (x,y)\in S=\partial D \tag{5}$$

Здесь

$$T_b=k_b(h-b) \tag{6}$$

В формулах (2)-(6) приняты следующие обозначения: $h(x,y)$, $H(x,y)$, $Z(x,y)$ - отметки УГВ в верхнем покровном слое и напоров в основном и нижележащем напорных пластах соответственно; $k_b(x,y)$, $k(x,y)$, $k_n=const$ - коэффициенты фильтрации верхнего, основного водоносного и слабопроницаемого слоев; $T(x,y)=k(x,y)\cdot m(x,y)$ - водопроницаемость основного пласта; $m_b(x,y)=h(x,y)-b(x,y)$, $m(x,y)$ и $m_n=const$ - мощности покровного, напорного и слабопроницаемого слоев; $b(x,y)$ - граница раздела покровного и основного напорного пластов; $W(x,y)$ - функция, учитывающая работу эксплуатационных скважин, пробуренных в основной водоносный горизонт; $_b(x,y)$, (x,y), $_b(x,y)$ и (x,y) - известные функции; D - область фильтрации в плане, $S=\partial D$ - ее граница; $\vec{n}$ - внешняя нормаль к границе области; $\dfrac{\partial}{\partial n}$ - производная по этой нормали.

Задача (2), (3)-(5) решается численно методом конечных элементов [3].

В сеточной области представим искомые функции в виде

$$h_n(x,y)=\sum_{e=1}^{m}h^{(e)}(x,y)=\sum_{j=1}^{n}h_jN_j(x,y) \tag{7}$$

$$H_n(x,y)=\sum_{e=1}^{m}H^{(e)}(x,y)=\sum_{j=1}^{n}H_jN_j(x,y) \tag{8}$$

где $N_j(x,y)$ - линейные базисные функции.

Представим уравнения (2), (3) в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial h}{\partial y}\right)+Q_bh=F_b,\qquad (x,y)\in D \tag{9}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)+QH=F,\qquad (x,y)\in D \tag{10}$$

где

$$Q_b=\frac{k_b}{h-b},\quad Q=Q_b+\frac{k_n}{m_n},\quad F_b=f+Q_bH,\quad F=-W+Q_bh+\frac{k_nZ}{m_n} \tag{11}$$

Уравнение (2) является нелинейным (т.к функция $T_b(x,y)$ зависит от $h(x,y)$), поэтому для его решения применяется итерационная процедура: в каждой итерации в выражении для T_b берутся значения функции $h(x,y)$, полученные из предыдущей итерации.

Образуя начальные приближения $h^{(0)}(x,y)$ и $H^{(0)}(x,y)$, подставим их в формулы (6) и (11) вместо функций h и H и решаем уравнения (9) и (10) совместно с краевыми условиями (4) и (5) соответственно. Обозначим полученные решения через $h^{(1)}$ и $H^{(1)}$, подставим их в формулы (6) и (11), и, решая задачи (9), (2) и (10), (4), находим следующие приближения $h^{(2)}$ и $H^{(2)}$ и т.д.

Подставляем в уравнения (9) и (10) и краевые условия (4) и (5) вместо h и H функции h_n и H_n и применяем обобщенный принцип Галеркина:

$$\iint\limits_{Д}N_i(x,y)\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial h_n}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)+Q_bh_n-F_b\right]dxdy+\int\limits_S N_i(x,y)\left(T_b\frac{\partial h_n}{\partial n}+\ _bh_n-\ \right)ds=0$$

$i=1,2,...,n,$

$$\iint\limits_{Д} N_i(x,y)\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H_n}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H_n}{\partial y}\right)+QH_n-F\right]dxdy+\int\limits_{S} N_i(x,y)\left(T\frac{\partial H_n}{\partial n}+\quad H_n-\quad\right)ds=0$$

$i=1,2,...,n.$

Используя формулу Грина, получаем системы уравнений

$$\iint\limits_{Д} T_b\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial h_n}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)dxdy+\iint\limits_{Д} N_iQ_bh_ndxdy+\int\limits_{S} N_i \quad {}_bh_nds=\iint\limits_{Д} N_iF_bdxdy+\int\limits_{S} N_i \quad {}_bds$$

$i=1,2,...,n,$

$$\iint\limits_{D} T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial H_n}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial H_n}{\partial y}\right)dxdy+\iint\limits_{Д} N_iQH_ndxdy+\int\limits_{S} N_i \quad H_nds=\iint\limits_{Д} N_iFdxdy+\int\limits_{S} N_i \quad ds$$

$i=1,2,...,n,$

или, в силу разложений (6) и (7) приходим к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(h)}h_j^{(s)}=b_i^{(h)}, \qquad i=1,2,\ldots,n; \quad s=1,2,\ldots \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(H)}H_j^{(s)}=b_i^{(H)}, \qquad i=1,2,\ldots,n; \quad s=1,2,\ldots \tag{13}$$

где

$$a_{ij}^{(h)}=\iint\limits_{Д} T_bq(N_i,N_j)dxdy+\iint\limits_{Д} Q_bN_i(x,y)N_j(x,y)dxdy+\int\limits_{S} \quad {}_bN_i(x,y)N_j(x,y)ds$$

$$b_i^{(h)}=\iint\limits_{Д} F_bN_i(x,y)dxdy+\int\limits_{S} \quad {}_bN_i(x,y)ds$$

$$a_{ij}^{(H)}=\iint\limits_{Д} T\ q(N_i,N_j)dxdy+\iint\limits_{Д} QN_i(x,y)N_j(x,y)dxdy+\int\limits_{S} \quad N_i(x,y)N_j(x,y)ds$$

$$b_i^{(H)}=\iint\limits_{Д} F\ N_i(x,y)dxdy+\int\limits_{S} \quad N_i(x,y)ds$$

$$q(N_i,N_j)=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}$$

Матрицы СЛАУ (12) и (13) являются хорошо обусловленными с диагональным преобладанием, они решаются последовательно с применением итераций.

Рассмотрим теперь алгоритм решения поставленной задачи.

Поскольку значения УГВ вычисляются в дискретном множестве точек, мы запишем дискретный аналог функционала (1):

$$J(f)=\sum_{i=1}^{n}\left[h(x_i,y_i;f_i)-\Phi(x_i,y_i)\right]^2+\quad\sum_{i=1}^{n} f_i^2, \tag{14}$$

где n - число узлов расчетной сетки.

УГВ $h(x,y;f)$ зависит от функции $f(x,y)$, вообще говоря, нелинейно. Линеаризуем ее относительно f следующим образом:

$$h(f)=\tilde{h}+\sum_{s=1}^{n}(f_s-\tilde{f}_s)\frac{\partial h}{\partial f_s}+R_2(\Delta f), \tag{15}$$

здесь $\tilde{h}=h(\tilde{f})$, $\tilde{f}$ - известное значение функции f, найденное в предыдущей итерации. Подставляя выражение (15) для h в формулу (14), имеем:

$$J(f)=\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{h}_i+\sum_{s=1}^{n}(f_s-\tilde{f}_s)\frac{\partial h_i}{\partial f_s}-\Phi_i\right]^2+\quad\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \tag{16}$$

Применяя необходимое условие минимума функции многих переменных

$$\frac{\partial J(f)}{\partial f_k}=0, \quad k=1,2,\cdots,n$$

из (16) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно f_s, $s=1,2,\cdots,n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{h}_i+\sum_{s=1}^{n}(f_s-\tilde{f}_s)\frac{\partial h_i}{\partial f_s}-\Phi_i\right]\frac{\partial h_i}{\partial f_k}+\quad f_k=0$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks} f_s = b_k \ , \quad k = 1, 2, \cdots, n \qquad (17)$$

где

$$a_{ks} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial f_s} \frac{\partial h_i}{\partial f_i} \ , \ k \neq s \ ; \ a_{kk} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial f_k} \right)^2 +$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\Phi_i - \tilde{h}_i + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial f_s} \tilde{f}_s \right) \frac{\partial h_i}{\partial f_k}$$

Задача оптимального управления УГВ реализуется следующим образом. За начальное приближение возможного управления берется функция $f^{(0)}(x,y) = 0$, решается задача (2)-(5) для всех и находятся соответствующие УГВ $h^{(1)}(x,y)$. Полученные значения УГВ используются для решения системы (17). Решая эту систему каким-либо точным или итерационным методом, получаем первое приближение управления $f^{(1)}(x,y)$. Подставляя эту функцию в уравнение (2) и повторяя весь цикл вычислений, находим следующее приближение $f^{(2)}(x,y)$, и т.д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условий

$$\left| h^{(v)}(x,y) - h^{(v-1)}(x,y) \right| <$$

где v — номер итерации; > 0 и $\Delta > 0$ — заданные малые числа.

Изложенный алгоритм и реализующая его программа отлажены на примере. Область фильтрации в плане представляет собой круг радиуса *r=3000 м*. Уравнения (2) и (3) описывают движение грунтовых и напорных вод в первых двух пластах от поверхности земли соответственно. На границе области, т.е. на окружности радиуса *r* заданы краевые условия (4) и (5). Проведя концентрические окружности радиуса *1000 м* и *2000 м*, область разбиваем на *55* элементов, число узлов при этом *n=39*.

Задача (1)-(5) решается со следующими данными:

$$T(x,y) = \sqrt{h_r^2 + \varepsilon(r^2 - x^2 - y^2)}, \quad h(x,y) = T + b_0, \quad H(x,y) = h(x,y) + 5 \quad м,$$

$$Z(x,y) = h(x,y) + 10 \quad м \ , \ f_в(x,y) = T(x,y) + 2\varepsilon\left[2k_b(x,y) - 5\right] - \frac{5k_b(x,y)}{T(x,y)} \ ,$$

$$W(x,y) = T + 2\varepsilon + \frac{5k_b(x,y)}{T(x,y)} - \frac{5\kappa_n}{m_n} \ , \ r = 3000 \quad м, \quad \varepsilon = 16 \cdot 10^{-4} \ ,$$

$$b_0 = 300 \quad м, \quad h_r = 350 \quad м, \quad h(0,0) = h_0 = 370 \quad м, \quad H(x,y) = h(x,y) + 5 \quad м,$$

$$k_b(x,y) = \frac{10xy}{r^2} + 5 \quad м/сут, \quad k_n = 2м/сут, \quad m_n = 10 \quad м \ ,$$

$$F_b = f_в(x,y) + \frac{\kappa_в}{m_в}(h(x,y) + 5) \ , \ F = W(x,y) + Q_b h(x,y) + \frac{\kappa_n}{m_n} Z \ ,$$

$$\beta_b(x,y) = \frac{\alpha_b + \varepsilon \cdot r \cdot k_b}{h_r + b_0} \ , \ \alpha_b - \text{любое число}, \ \beta(x,y) = \frac{\alpha + \varepsilon \cdot r}{h_r + b_0 + 5} \ , \quad - \text{любое число},$$

$$\alpha_b = \beta_b(h_r + b_0) - \varepsilon \cdot r \cdot k_b \ , \ \beta_b - \text{любое число}, \ \alpha = \beta(h_r + b_0 + 5) - \varepsilon \cdot r \ , \ \beta \ - \text{любое число}.$$

В Табл. 1. приведены значения УГВ на различных расстояниях от центра области.

Табл. 1. *Значения функций* $\Phi(x,y)$, $h(x,y)$ *и* $f(x,y)$

r, м	0	1000	2000	3000
$\Phi(x,y)$, м	650.00	650.00	650.00	650.00
$h(x,y)$, м	650.25	649.93	649.90	650.00
$f(x,y)$, м/сут	-0.5928	-0.2525	-0.0452	0.0735
абс. погр., м	0.25	0.07	0.19	0.00
$\Phi(x,y)$, м	660.00	660.00	660.00	660.00
$h(x,y)$, м	660.25	659.94	659.90	660.00
$f(x,y)$, м/сут	-0.4534	-0.1372	0.0406	0.2072
абс. погр., м	0.25	0.06	0.11	0.01
$\Phi(x,y)$, м	670.00	670.00	670.00	670.00
$h(x,y)$, м	670.25	669.94	669.89	670.01
$f(x,y)$, м/сут	- 0.3202	-0.0183	0.1215	0.3343
абс. погр., м	0.25	0.06	0.11	0.01

$\Phi(x, y)$, м	670.00	667.83	661.25	650.00
$h(x,y)$, м	669.80	667.96	661.21	649.88
$f(x,y)$, м/сут	0.07	-0.15	-0.05	-0.2
абс. погр., м	0.20	0.13	0.04	0.12

Список литературы

1. **Васильев П. В.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. **Джаныбеков Ч. Дж., Уралиев А. А.** Об одном приближенном способе конструирования оптимального управления движениями подземных вод в неоднородной пористой среде // Вестник Ысык-Кульского государственного университета. 2004. № 11. С. 19-23.
3. **Мурзакматов М. У., Маданбекова Э. Э.** Математическая модель неустановившейся фильтрации подземных вод в многослойных пластах // Доклады 2-ой Международной конференции «Проблемы управления и информатики». Бишкек, 2007. Кн. 2. С. 112-117.

УДК 534.1:004

Владимир Николаевич Нестеров, Андрей Петрович Поздняков, Даниил Ражиевич Добринский
Волгоградский государственный архитектурно строительный университет

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ: КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ©

Колебания - это движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. В физике выделяются механические и электромагнитные колебания. Колебания любых физических величин всегда связаны с переменным превращением энергии одного вида в энергию другого вида. Так при отклонении маятника от положения равновесия, увеличивается потенциальная энергия груза, запасенная им в поле тяжести. Если груз отпустить он падает, вращаясь около точки подвеса как около центра. В крайнем нижнем положении потенциальная энергия превращается в кинетическую, груз проскакивает равновесное положение, увеличивая потенциальную энергию, далее процесс перекачки энергии повторяется, пока диссипации энергии, обусловленные трением, не приводят к полному прекращению колебаний.

В случае колебаний электрических зарядов и токов в колебательном контуре, роль потенциальной играет электрическая энергия, а кинетической - магнитная.

Возбуждение колебаний происходит либо путем непосредственного воздействия на состояние колебательной системы, либо путем периодического изменения параметров этой системы, либо благодаря самовозбуждению. В первом случае говорят о вынужденных колебаниях, а во втором о параметрическом возбуждении колебаний, а в третьем - об автоколебаниях.

Рассмотрим вынужденные колебания на примере пружинного маятника. Для этого задаем параметры колебательной системы: k - коэффициент жесткости пружины, m - масса колеблющегося груза (Рис. 1).

Далее определяем собственную частоту колебаний ω0 (Рис. 1).

Задаем коэффициент затухания β (Рис. 1). Выбираем конечный промежуток времени моделирования tend (Рис. 1) и амплитуду вынуждающей силы F (Рис. 1). Определяем по формуле $=\sqrt{\ _0^{2}+\ ^{2}}$ резонансную частоту колебаний (Рис. 1). Далее записывается блок решения дифференциального уравнения вынужденных колебаний. Блок открывается оператором Given (Рис. 1).

Далее записывается дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (Рис. 1). Задаются начальные условия смещения x(0)=0 и скорость x'(0)=10 (Рис. 1).

Решение находится с помощью оператора Odesolve (Рис. 1). Ниже выводится график временной зависимости смещения (Рис. 1).

Скорость является первой производной от смещения (Рис. 2). По временным зависимостям смещения и скорости задаются временные зависимости потенциальной энергии U(t) и кинетической энергии Ek(t), сумма потенциальной и кинетической энергии дает полную энергию механической системы E(t) (Рис. 2).

Выводятся графики временной зависимости потенциальной, кинетической и полной энергий.

Для сравнения фазовых портретов при силовом подходе x(t) - v(t) и энергетическом подходе U(t) - Ek(t) строятся соответствующие графики.

В следующей программе приведен анализ энергетического баланса вынуждающей силы AF(t) и диссипативной силы AB(t) (Рис. 5-7).
