Коротков Анатолий Васильевич
СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2К ВЕКТОРОВ
В работе содержатся материалы по определению скалярных произведений в многомерных вещественных линейных векторных пространствах применительно к семимерным векторным алгебрам. Найдены дополнительно к скалярному произведению двух векторов скалярные произведения четырёх и шести векторов. Рассмотрены понятия расстояния между четырьмя, а также шестью векторами и найдены определения косинусов углов между четырьмя и шестью векторами.

Тамбов: Грамота, 2012. № 10 (65). C. 114-115. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/10/

УДК 512.7
Физико-математические науки

В работе содержатся материалы по определению скалярных произведений в многомерных вещественных линейных векторных пространствах применительно к семимерным векторным алгебрам. Найдены дополнительно к скалярному произведению двух векторов скалярные произведения четырёх и шести векторов. Рассмотрены понятия расстояния между четырьмя, а также шестью векторами и найдены определения косинусов углов между четырьмя и шестью векторами.

Ключевые слова и фразы: семимерные векторные алгебры; скалярное произведение двух векторов; линейное вещественное векторное пространство; скалярное произведение четырёх векторов; скалярное произведение шести векторов.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2К ВЕКТОРОВ©

В обычной геометрии *n*-мерного линейного векторного пространства существеннейшую роль играют метрические понятия, связанные с измерением. К ним относятся длина вектора и угол между векторами. Длина вектора не является линейной функцией от вектора и угол между векторами не является линейной функцией одного из векторов при фиксированном втором. Несмотря на это, из длин двух векторов и угла между ними при помощи действий, далеких от линейности, строят так называемое скалярное произведение двух векторов, являющееся билинейной функцией от векторов, т.е. линейной по каждому из векторов при фиксированном втором. Именно скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин и косинуса угла между ними. Все сказанное дает основание при введении метрических понятий в теорию многомерных вещественных пространств исходить из понятия скалярного произведения двух векторов.

Скалярным произведением **(AB)** двух векторов вещественного *n*-мерного векторного пространства называют функцию от векторов **A** и **B** с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$(\mathbf{A}, \alpha\mathbf{B}+\beta\mathbf{C}) = \alpha(\mathbf{AB})+ \beta(\mathbf{AC})$;

2) симметрии

$(\mathbf{AB})=(\mathbf{BA})$;

3) положительной определенности

$(\mathbf{AA}) >0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по другому аргументу:

$(\alpha\mathbf{A}+ \beta\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \alpha(\mathbf{AC})+\beta(\mathbf{BC})$.

Для скалярного произведения двух векторов выполняется неравенство Коши, т.е.

$(\mathbf{AB})=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathrm{Cos}\varphi_{AB}$,

или $(\mathbf{AB})^2 \leq |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$.

Это неравенство делает осмысленным определение угла φ_{AB}, образованного двумя векторами **A** и **B**, посредством формулы

$\mathrm{Cos}\varphi_{AB}= (\mathbf{AB})/|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

как тригонометрической функции угла между парой векторов. Условием перпендикулярности двухгранного угла является $\mathrm{Cos}\varphi_{AB} = 0$, что имеет место при перпендикулярности одного из векторов другому вектору.

Скалярным произведением **(ABCD)** четырех векторов вещественного *n*-мерного векторного пространства назовем функцию от векторов **A**,**B**,**C** и **D** с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$(\mathbf{ABC}, \alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E}) = \alpha(\mathbf{ABCD})+\beta(\mathbf{ABCE})$;

2) симметрии по любой паре векторов

$(\mathbf{ABCD})=(\mathbf{BACD})=...=(\mathbf{ABDC})$;

3) положительной определенности

$(\mathbf{AAAA}) >0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по любому аргументу. Перечисленным условиям удовлетворяет скалярное произведение четырех векторов вида:

$(\mathbf{ABCD}) = 1/3\ ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD}))$.

Действительно:

1) $(\mathbf{ABC},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E})=1/3((\mathbf{AB})(\mathbf{C},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E})+(\mathbf{BC})(\mathbf{A},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E})+(\mathbf{CA})(\mathbf{B},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E}))=$
$=\alpha/3((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})+(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD}))+$
$+\beta/3((\mathbf{AB})(\mathbf{CE})+(\mathbf{BC})(\mathbf{AE})+(\mathbf{CA})(\mathbf{BE}))=$
$= \alpha(\mathbf{ABCD})+\beta(\mathbf{ABCE})$;

2) **(ABCD)** не изменяется при перестановке любой пары векторов;

3) $(\mathbf{AAAA})= (\mathbf{AA})(\mathbf{AA}) >0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Для скалярного произведения четырех векторов выполняется неравенство (Коши), т.е.

$(\mathbf{ABCD})=|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}|(1/3)(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}+\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BD})$

или $(\mathbf{ABCD})^2 \le |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}|^2$.

Это неравенство делает осмысленным определение угла φ_{ABCD}, образованного четырьмя векторами **A**,**B**,**C** и **D** посредством формулы

$\mathrm{Cos}\varphi_{ABCD}=(\mathbf{ABCD})/|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}|=(1/3)(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}+\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BD})$

как тригонометрической функции шести углов между парами векторов. Условием перпендикулярности четырехгранного угла является $\mathrm{Cos}\varphi_{ABCD}=0$, что имеет место, например, при перпендикулярности одного из векторов трем другим векторам.

Примерами ортогональности являются:

$(\mathbf{ABC[ABC]}) = 0$ и $(\mathbf{[AB][BC][CA][ABC]}) = 0$.

Скалярным произведением **(ABCDEF)** шести векторов вещественного *n*-мерного векторного пространства назовем функцию от векторов **A,B,C,D,E** и **F** с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$(\mathbf{ABCDE},\ \alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G}) = \alpha(\mathbf{ABCDEF})+\beta(\mathbf{ABCDEG})$;

2) симметрии по любой паре векторов

$(\mathbf{ABCDEF})=(\mathbf{BACDEF})=...=(\mathbf{ABCDFE})$;

3) положительной определенности

$(\mathbf{AAAAAA}) >0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по любому аргументу. Перечисленным условиям удовлетворяет скалярное произведение шести векторов вида:

$(\mathbf{ABCDEF}) = 1/15((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{BF})+$
$+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{DF}) +(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{AF})+$
$+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{DF})+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{EF})+$
$+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{DF}))$.

Действительно:

1) $(\mathbf{ABCDE},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})=1/15*((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{E},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{A},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+$
$+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{B},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{C},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{D},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+$
$+(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{E},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{A},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{B},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+$
$+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{C},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{D},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{E},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+$
$+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{A},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{B},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{C},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+$
$+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{D},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G}))=\alpha/15((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{AF})+$
$+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{DF})+(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{EF})+$
$+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{DF})+$
$+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{CF})+$
$+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{DF}))+\beta/15((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EG})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{AG})+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{BG})+$
$+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{CG})+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{DG})+(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{EG})+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{AG})+$
$+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{BG})+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{CG})+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{DG})+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{EG})+$
$+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{AG})+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{BG})+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{CG})+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{DG}))=$
$= \alpha(\mathbf{ABCDEF})+\beta(\mathbf{ABCDEG})$;

2) **(ABCDEF)** не изменяется при перестановке любой пары векторов;

3) $(\mathbf{AAAAAA})= (\mathbf{AA})(\mathbf{AA})(\mathbf{AA}) >0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Для скалярного произведения шести векторов выполняется неравенство (Коши), т.е.

$(\mathbf{ABCDEF})=|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}||\mathbf{E}||\mathbf{F}|(1/15)*(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{BE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{DB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{EC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+\mathrm{Cos}\varphi_{DB}\mathrm{Cos}\varphi_{CE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+\mathrm{Cos}\varphi_{EC}\mathrm{Cos}\varphi_{DA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{AD}\mathrm{Cos}\varphi_{EB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+\mathrm{Cos}\varphi_{BE}\mathrm{Cos}\varphi_{AC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF})$,

или $(\mathbf{ABCDEF})^2 \le |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}|^2|\mathbf{E}|^2|\mathbf{F}|^2$.

Это неравенство делает осмысленным определение угла φ_{ABCDEF}, образованного шестью векторами **A**,**B**,**C**,**D**,**E** и **F** посредством формулы

$\mathrm{Cos}\varphi_{ABCDEF}=(\mathbf{ABCDEF})/|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}||\mathbf{E}||\mathbf{F}|=(1/15)*(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{BE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{DB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{EC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+\mathrm{Cos}\varphi_{DB}\mathrm{Cos}\varphi_{CE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+\mathrm{Cos}\varphi_{EC}\mathrm{Cos}\varphi_{DA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+$
$+\mathrm{Cos}\varphi_{AD}\mathrm{Cos}\varphi_{EB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+\mathrm{Cos}\varphi_{BE}\mathrm{Cos}\varphi_{AC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF})$

как тригонометрической функции пятнадцати углов между парами векторов. Условием перпендикулярности шестигранного угла является $\mathrm{Cos}\varphi_{ABCDEF}=0$, что имеет место, например, при перпендикулярности одного из векторов пяти другим векторам.

Вообще можно задать скалярное произведение четного числа *2к* векторов, при этом $2к \le n$.

Список литературы

1. **Фаддеев Д. К.** Лекции по алгебре. М.: Наука (Главная редакция физико-математической литературы), 1984. 416 с.