Козлов Игорь Владимирович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ЖЁСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На основе известных формул численного дифференцирования и интерполяции Лагранжа строятся линейно неявные многошаговые численные методы решения задач Коши для жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы имеют порядки точности со второго по пятый и содержат простой и надёжный алгоритм управления шагом. Матрица Якоби в этих методах используется только в первой степени. Данные методы могут значительно превосходить по устойчивости методы формул дифференцирования назад соответствующих порядков точности.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 11 (66). C. 87-89. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/11/

14. **Ляшенко А. Л.** Математическое моделирование распределенного объекта управления с подвижным источником воздействия // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2011. № 1 (115). С. 113-118.
15. **Ляшенко А. Л.** Определение области устойчивости систем с распределенными параметрами методом расширенных частотных характеристик // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2011. № 3 (126). С. 73-77.
16. **Ляшенко А. Л.** Разработка методики синтеза распределенного П-регулятора по показателю колебательности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2012. № 4 (152). С. 51-55.
17. **Ляшенко А. Л.** Разработка номограмм для расчета настроек распределенного ПИД-регулятора // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2012. № 2 (145). С. 67-71.
18. **Ляшенко А. Л., Золотов О. И.** Анализ систем с распределенными параметрами на запас устойчивости по показателю колебательности // Известия Южного федерального университета. Технические науки. Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2011. С. 206-213.
19. **Ляшенко А. Л., Морева С. Л. и др.** Разработка математической модели температурных полей активной зоны реактора РБМК-1000 // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2012. № 4 (152). С. 79-84.

УДК 519.622.2
Физико-математические науки

На основе известных формул численного дифференцирования и интерполяции Лагранжа строятся линейно неявные многошаговые численные методы решения задач Коши для жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы имеют порядки точности со второго по пятый и содержат простой и надёжный алгоритм управления шагом. Матрица Якоби в этих методах используется только в первой степени. Данные методы могут значительно превосходить по устойчивости методы формул дифференцирования назад соответствующих порядков точности.

Ключевые слова и фразы: система обыкновенных дифференциальных уравнений; задача Коши; жёстко устойчивый линейно неявный многошаговый метод.

Игорь Владимирович Козлов
п. Юбилейный, Новгородская область
leochudo@yandex.ru

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ЖЁСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ©

Решаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)) \qquad (1)$$

В выражении

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{d}{dt}y(t_j) - f\left(t_j, y(t_j)\right)\right)\cdot c_j + J(t_{k-1})\cdot\left(y(t_k) - y(t_k)\right) = 0 \qquad (2)$$

где $J(t_{k-1})$ - матрица Якоби системы (1),

$t_1 = t_0 + h_1 \dots t_k = t_{k-1} + h_k,\ h_1 > 0 \dots h_k > 0, k = 2 \dots 6$ с помощью формул для n-го уравнения системы (1)

$$\frac{d}{dt}y_n(t) = \sum_{j=0}^{k} v_j(t)\cdot y_n(t_j) + \frac{1}{(k+1)!}\cdot\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}y_n(\zeta_n)\cdot Q(t) + \frac{1}{(k+2)!}\cdot\frac{d^{k+2}}{dt^{k+2}}y_n(\theta_n)\cdot P(t) \qquad (3)$$

где $v_j(t) = \frac{d}{dt}\frac{P(t)}{(t-t_j)\cdot Q(t_j)}, P(t) = \prod_{j=0}^{k}(t-t_j), Q(t) = \frac{d}{dt}P(t), t_0 \le \zeta_n \le t_k, t_o \le \theta_n \le t_k$ и

$$y_n(t) = \sum_{j=0}^{k-1} u_j(t)\cdot y_n(t_j) + \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dt^k}y_n(\xi_n)\cdot p(t) \qquad (4)$$

где $u_j(t) = \frac{p(t)}{(t-t_j)\cdot q(t_j)}, p(t) = \prod_{j=0}^{k-1}(t-t_j), q(t) = \frac{d}{dt}p(t), t_0 \le \xi_n \le t_{k-1}$

аппроксимируем $\frac{d}{dt}y(t_j)$ и левый $y(t_k)$ в правой разности, отбросив слагаемые с производными высших порядков. Заменив в полученном выражении, умноженном на h_k, величины $y(t_j), f(t_j, y(t_j)), J(t_{k-1})$ их приближенными значениями y_j, f_j, J и положив $c_j = u_j(t_k)$ $(j = 0 \dots k-1)$, приходим к k-шаговым линейно неявным методам решения задач Коши для систем (1) с переменным шагом вида

$$(J\cdot h_k - a_k\cdot E)\cdot y_k = \sum_{j=0}^{k-1} a_j\cdot y_j + \sum_{j=0}^{k-1} b_j\cdot(J\cdot y_j - f_j) \qquad (5)$$

где E - единичная матрица, a_j, a_k, b_j - компоненты векторов

$$b = \begin{pmatrix} u_0(t_k) \\ \dots \\ u_\mu(t_k) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot h_k \text{ и } a = \begin{pmatrix} v_o(t_o) & \dots & v_o(t_\mu) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_k(t_o) & \dots & v_k(t_\mu) & 0 \end{pmatrix} \cdot b$$

где $\mu = k - 1$, матрица - квадратная, с правым столбцом, состоящим из нулей.

Эти методы имеют глобальные порядки точности $p = k$. При постоянном шаге характеристические уравнения и описываемые ими области устойчивости для систем вида $y' = Jy$ ($J = const$) этих методов и методов формул дифференцирования назад соответствующих порядков точности совпадают. Таким образом, эти методы формально жёстко устойчивы при $p = 2 \dots 6$. Реально же они достаточно жёстко устойчивы, как показывает, например, решение системы Ван-дер-Поля, при $p = 2 \dots 5$.

Положительным моментом в смысле точности, сравнительно с некоторыми другими методами, представляется отсутствие в (3), (4) и (5) множителей вида $e^{K \cdot J \cdot h}$ и $(J \cdot h)^m$ при $m > 1$.

Для контроля точности вычислений по формулам (5), согласно (2), (3) и (4), используем условие

$$err = \|M \cdot \alpha + M \cdot J \cdot \beta\| \le tol \quad (6)$$

или

$$err = \|M \cdot \alpha\| + \|M \cdot J \cdot \beta\| \le tol \quad (7)$$

где $M = (J \cdot h_k - a_k \cdot E)^{-1}$, $\|\dots\|$ - евклидова (или другая) норма вектора,

$$\alpha = \frac{h_k}{(k+1)!} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} w_j(t_k) \cdot f_j\right) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} u_j(t_k) \cdot Q(t_j) = \frac{k}{k+1} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot f_j - h_k \cdot f_k\right), w_j(t) = \frac{d^k}{dt^k} \frac{P(t)}{(t-t_j) \cdot Q(t_j)},$$

$$f_k = f(t_k, y_k), \beta = \frac{h_k}{k!} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} w_j(t_k) \cdot y_j\right) \cdot p(t_k) = -\left(\sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot y_j - h_k \cdot y_k\right)$$

Линейные комбинации $w_j(t_k)$ аппроксимируют производные

$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} y_n(\zeta_n) = \frac{d^k}{dt^k} f_n(\zeta_n, y_n(\zeta_n))$ и $\frac{d^k}{dt^k} y_n(\xi_n)$ из (3) и (4) с первым порядком точности.

Шаг регулируем так. Берём h_k из начальных данных или предыдущего шага. Находим y_k и err. Затем последовательно выполняем два цикла: 1) пока $err < tol$, переменной h_k присваиваем значение $h_k \cdot 2$ и находим y_k и err; 2) пока $err > tol$, переменной h_k присваиваем значение $\frac{h_k}{2}$ и находим y_k и err. Таким образом находим h_k и повторяем вышеописанный процесс. При этом вместо умножения и деления h_k на 2 можно, согласно [4, с. 177], использовать соответственно умножение на $max\left[2, \left(\frac{tol}{err}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]$ и $min\left[\frac{1}{2}, \left(\frac{tol}{err}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]$.

Условие (7) более надёжно, чем (6), при $p = k = 5$, но заметно уменьшает производительность метода.

При $p = k = 2$ имеем:

$$a = \begin{bmatrix} \dfrac{h_2^2}{h_1 \cdot (h_1 + h_2)} \\ \dfrac{-(h_1 + h_2)}{h_1} \\ \dfrac{2 \cdot h_2 + h_1}{h_1 + h_2} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \dfrac{-h_2^2}{h_1} \\ \dfrac{(h_1 + h_2)}{h_1} \cdot h_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

При $p = k = 3$ имеем:

$$a = \begin{bmatrix} \dfrac{-h_3^2 \cdot (h_2+h_3)}{h_1 \cdot (h_1+h_2) \cdot (h_1+h_2+h_3)} \\ \dfrac{(h_1+h_2+h_3) \cdot h_3^2}{h_2 \cdot h_1 \cdot (h_2+h_3)} \\ \dfrac{-(h_1+h_2+h_3) \cdot (h_2+h_3)}{h_2 \cdot (h_1+h_2)} \\ \dfrac{h_3}{(h_1+h_2+h_3)} + \dfrac{h_3}{(h_2+h_3)} + 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \dfrac{(h_2+h_3) \cdot h_3^2}{h_1 \cdot (h_1+h_2)} \\ \dfrac{-(h_1+h_2+h_3) \cdot h_3^2}{h_2 \cdot h_1} \\ \dfrac{(h_1+h_2+h_3) \cdot (h_2+h_3)}{h_2 \cdot (h_1+h_2)} \cdot h_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

При $p = k = 4$ имеем:

$$a = \begin{bmatrix} \dfrac{h_4^2 \cdot (h_3 + h_4) \cdot (h_2 + h_3 + h_4)}{h_1 \cdot (h_1 + h_2) \cdot (h_1 + h_2 + h_3) \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)} \\ \dfrac{-h_4^2 \cdot (h_3 + h_4) \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)}{h_2 \cdot h_1 \cdot (h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_2 + h_3)} \\ \dfrac{h_4^2 \cdot (h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)}{h_3 \cdot h_2 \cdot (h_3 + h_4) \cdot (h_1 + h_2)} \\ \dfrac{-(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_3 + h_4)}{(h_1 + h_2 + h_3) \cdot (h_2 + h_3) \cdot h_3} \\ \dfrac{h_4}{(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)} + \dfrac{h_4}{(h_2 + h_3 + h_4)} + \dfrac{h_4}{(h_3 + h_4)} + 1 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} \dfrac{-(h_2+h_3+h_4)\cdot(h_3+h_4)\cdot h_4^2}{h_1\cdot(h_1+h_2)\cdot(h_1+h_2+h_3)} \\ \dfrac{(h_1+h_2+h_3+h_4)\cdot(h_3+h_4)\cdot h_4^2}{h_2\cdot h_1\cdot(h_2+h_3)} \\ \dfrac{-(h_1+h_2+h_3+h_4)\cdot(h_2+h_3+h_4)\cdot h_4^2}{(h_1+h_2)\cdot h_2\cdot h_3} \\ \dfrac{(h_1+h_2+h_3+h_4)\cdot(h_2+h_3+h_4)\cdot(h_3+h_4)}{(h_1+h_2+h_3)\cdot(h_2+h_3)\cdot h_3}\cdot h_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

При $p=k=5$ имеем:

$$a=\begin{bmatrix} \dfrac{-h_5^2\cdot(h_4+h_5)\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)}{h_1\cdot(h_1+h_2)\cdot(h_1+h_2+h_3)\cdot(h_1+h_2+h_3+h_4)\cdot(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)} \\ \dfrac{h_5^2\cdot(h_4+h_5)\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)}{h_1\cdot h_2\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)(h_2+h_3+h_4)\cdot(h_2+h_3)} \\ \dfrac{-h_5^2\cdot(h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)}{h_3\cdot h_2\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_3+h_4)\cdot(h_1+h_2)} \\ \dfrac{h_5^2\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)}{h_4\cdot h_3\cdot(h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3)(h_1+h_2+h_3)} \\ \dfrac{-(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_4+h_5)}{(h_1+h_2+h_3+h_4)\cdot(h_2+h_3+h_4)\cdot(h_3+h_4)\cdot h_4} \\ \dfrac{h_5}{(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)}+\dfrac{h_5}{(h_2+h_3+h_4+h_5)}+\dfrac{h_5}{(h_3+h_4+h_5)}+\dfrac{h_5}{(h_4+h_5)}+1 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} \dfrac{(h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_4+h_5)\cdot h_5^2}{h_1\cdot(h_1+h_2)\cdot(h_1+h_2+h_3)\cdot(h_1+h_2+h_3+h_4)} \\ \dfrac{-(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_4+h_5)\cdot h_5^2}{h_1\cdot h_2\cdot(h_2+h_3)\cdot(h_2+h_3+h_4)} \\ \dfrac{(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_4+h_5)\cdot h_5^2}{(h_1+h_2)\cdot h_2\cdot h_3\cdot(h_3+h_4)} \\ \dfrac{-(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot h_5^2}{(h_1+h_2+h_3)\cdot(h_2+h_3)\cdot h_3\cdot h_4} \\ \dfrac{(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_2+h_3+h_4+h_5)\cdot(h_3+h_4+h_5)\cdot(h_4+h_5)}{(h_1+h_2+h_3+h_4)\cdot(h_2+h_3+h_4)\cdot(h_3+h_4)\cdot h_4}\cdot h_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Эти выражения для векторов *a* и *b* получены с помощью символьной алгебры на *MathCad 2000 Professional*.

Список литературы

1. **Скворцов Л. М.** Явные адаптивные методы численного решения жёстких систем // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 12.
2. **Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений** / под ред. Д. Холл, Д. Уатт; пер. с англ. М.: Мир, 1979. 281 с.
3. **Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 685 с.
4. **Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.