УДК 512.7
Физико-математические науки

В работе рассматриваются различные произведения трех векторов в пятнадцатимерной векторной алгебре на основе построенных раннее трехмерной и семимерной векторных алгебр - простейшее, смешанное и двойное векторное произведение. Последнее дает известное из семимерной алгебры соотношение Якоби с ненулевой правой частью. Найдены координатная и векторная формы записи векторного произведения трех векторов как сумма ста пяти определителей четвертого порядка. Ставится проблема о размерности физического пространства.

Ключевые слова и фразы: векторная алгебра; пятнадцатимерное векторное произведение двух векторов; оператор суммы моментов импульса; простейшее, смешанное, двойное векторное и векторное произведения трех векторов; сумма определителей третьего и четвертого порядков; размерность физического пространства.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЕ©

$$\left\| \begin{matrix} \textit{3-D} & 2^m\textit{-1} & 2n+1 \\ 2n+1 & \textit{7-D} & 2^m\textit{-1} \\ 2^m\textit{-1} & 2n+1 & \textit{15-D} \end{matrix} \right\|$$

Обозначим определитель третьего порядка символом

$$|i,j,k| = \begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

Тогда векторное произведение двух векторов ***[a,b]*** представляется:
- в ***одномерном*** случае как $|1,0,0|=0$;
- в ***трехмерном*** случае в виде одного определителя третьего порядка

$$[a,b]=|1,2,3|=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

или в координатной форме записи

$$[a,b]= \begin{matrix} (a_2b_3 & -b_2a_3) & e_1 \\ (a_3b_1 & -b_3a_1) & e_2 \\ (a_1b_2 & -b_1a_2) & e_3 \end{matrix}$$

Тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ является совершенно антисимметричным единичным *3*-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ±*1*.

Тензор структурных констант имеет вид:

σ^{ijk}	1	2	3
1	0	-1	1
2	1	0	-1
3	-1	1	0

С целью упрощения записи лучше использовать сумму трех операторов момента импульса $L=(L_1,L_2,L_3)$. Она определяет векторное произведение двух векторов и может быть представлена в виде суммы трёх компонент. Матрицы L и L_i третьего порядка с мнимыми элементами.

В трехмерном случае
$[a,b]=[a_ie_ib_je_j]=a_ib_j[e_ie_k]=\sigma_{ij}^k a_ib_je_k$
при последовательности чисел $e_ia_jb_k = 1,2,3; 2,3,1; 3,1,2$
$\sigma_{ij}^k=1;$
при обратной последовательности $\sigma_{ij}^k=-1;$
для других наборов чисел $\sigma_{ij}^k=0.$

Отметим, что подстановки на множестве индексов ***1,2,3*** дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя ***[1, 2]***:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Очень специфичны свойства (суммы операторов момента импульса) тензора структурных констант:

- во-первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных -симметричны;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1 и может быть как угодно большой;
- все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные - L^2;
- целые степени матрицы определяются двумя числами;
- матрицы L определяют векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L и всех её степеней равен нулю.

Приведем несколько примеров.

$-L^2/3^0$	*1*	*2*	*3*		$-iL^3/3^0$	*1*	*2*	*3*		$L^4/3^1$	*1*	*2*	*3*		$-iL^5/3^1$	*1*	*2*	*3*
1	*-2*	*1*	*1*		*1*	*0*	*-1*	*1*		*1*	*-2*	*1*	*1*		*1*	*0*	*-1*	*1*
2	*1*	*-2*	*1*		*2*	*1*	*0*	*-1*		*2*	*1*	*-2*	*1*		*2*	*1*	*0*	*-1*
3	*1*	*1*	*-2*		*3*	*-1*	*1*	*0*		*3*	*1*	*1*	*-2*		*3*	*-1*	*1*	*0*

Операторы момента импульса связаны соотношениями:

$-iL_1=L_2*L_3-L_3*L_2,$

$-iL_2=L_3*L_1-L_1*L_3,$

$-iL_3=L_1*L_2-L_2*L_1,$

причём

$L= L_1+ L_2+ L_3$

и скалярный квадрат операторов момента импульса

$L^2= L_1^2+ L_2^2+ L_3^2.$

Очевидно, что без учёта коэффициентов чётные (кроме 0) и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют числовые величины, аналогичные **единицам комплексных чисел**, при этом эти числа приобретают 2^n*-1*-мерный векторный характер, и среди них выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. При этом

$$L^1/3^0=-L^3/3^1=L^5/3^2=\ldots \begin{Vmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{Vmatrix}, \quad -L^2/3^0=L^4/3^1=-L^6/3^2=\ldots \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

$$p^1=-L^2/3^0=p^3/3^2=p^5/3^4=\ldots \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}, \quad -p^2/3^1=-p^4/3^3=-p^6/3^5=\ldots \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

$$-(L^1/3^1)p^1=(L^3/3^4)p^3=\ldots \begin{Vmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{Vmatrix}, \quad -(L^2/3^2)p^2=(L^4/3^5)p^4=\ldots \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

(квадрат модуля)

$$-(p^1+iL^1)(p^1-iL^{1)}/(3^1+1)= \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

(теорема Пифагора)

$$(p^2+L^2)/(3^2-1)= \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

определители

$/L/=0, \ldots /L^n/=0, \qquad /p/=0, \ldots /p^n/=0,$

что аналогично комплексным числам.

У трехмерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$L^2=L_1^2+L_2^2+L_3^2=2I,$

где I - единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

В семимерном случае векторное произведение двух векторов удобно записать в координатной форме записи:

$$\begin{array}{llllllll}
[a,b]= & ((a_2b_3 & -b_2a_3) & +(a_4b_5 & -b_4a_5) & +(b_6a_7, & -a_6b_7)) & \mathbf{e_1}, \\
 & (+(a_4b_6 & -b_4a_6) & +(a_5b_7 & -b_5a_7) & +(b_1a_3, & -a_1b_3)) & \mathbf{e_2}, \\
 & (+(a_6b_5 & -b_6a_5) & +(a_1b_2 & -b_1a_2) & +(b_7a_4, & -a_7b_4)) & \mathbf{e_3}, \\
 & (+(a_5b_1 & -b_5a_1) & +(a_7b_3 & -b_7a_3) & +(b_2a_6, & -a_2b_6)) & \mathbf{e_4}, \\
 & (+(a_7b_2 & -b_7a_2) & +(a_3b_6 & -b_3a_6) & +(b_4a_1, & -a_4b_1)) & \mathbf{e_5}, \\
 & (+(a_1b_7 & -b_1a_7) & +(a_2b_4 & -b_2a_4) & +(b_3a_5, & -a_3b_5)) & \mathbf{e_6}, \\
 & (+(a_3b_4 & -b_3a_4) & +(a_6b_1 & -b_6a_1) & +(b_5a_2, & -a_5b_2)) & \mathbf{e_7}
\end{array}$$

или в виде суммы семи определителей

$$\boldsymbol{[ab]}= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_4 & e_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_6 & e_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_5 & e_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} e_5 & e_7 & e_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_1 & e_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_3 & e_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

Тензор структурных констант и сумма операторов момента импульса имеют вид:

$\sigma^{ijk}= -iL$	1	2	3	4	5	6	7	$-iLr$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	-3	2	-5	4	7	-6
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	2	3	0	-1	-6	-7	4	5
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	3	-2	1	0	-7	6	-5	4
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	4	5	6	7	0	-1	-2	-3
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	5	-4	7	-6	1	0	3	-2
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	6	-7	-4	5	2	-3	0	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	7	6	-5	-4	3	2	-1	0

Они определяют векторное произведение двух векторов. Матрица суммы операторов момента импульса $\boldsymbol{L}=(L_1,L_2,\dots,L_7)$ может быть представлена в виде суммы семи компонент. Матрицы $\boldsymbol{L}$ и L_i 7-го порядка.

В семимерном случае

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_i\boldsymbol{e}_i b_j\boldsymbol{e}_j]=a_i b_j[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k]=\sigma_{ij}^{\ \ k}a_i b_j\boldsymbol{e}_k$;

при последовательности чисел

$\boldsymbol{e}_i a_j b_k$ **= 1,2,3; 2,4,6; 3,6,5; 4,5,1; 5,7,2; 6,1,7; 7,3,4**

$\sigma_{ij}^{\ \ k}=1$; при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ \ k}=-1$; для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ \ k}=0$.

При этом тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ является совершенно антисимметричным единичным 7-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Отметим, что подстановки на множестве индексов *1,2,…,7* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица подстановки индексов:

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

Первые три столбца (или строки) этой таблицы характеризуют значения индексов определителей в векторном произведении двух векторов.

Специфичны свойства (суммы операторов момента импульса) тензора структурных констант:

- во-первых, суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных - симметричны;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1;
- все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные - L^2;
- целые степени матрицы определяются двумя числами;
- матрицы L_i определяют векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L и её степеней равен нулю.

Приведем несколько примеров. Имеем

$-iL_1=m(L_2*L_3-L_3*L_2+ L_4*L_5-L_5*L_4+ L_7*L_6-L_6*L_7)$,

$-iL_2=m(L_4*L_6-L_6*L_4+ L_5*L_7-L_7*L_5+ L_3*L_1-L_1*L_3)$,

$-iL_3=m(L_6*L_5-L_5*L_6+ L_1*L_2-L_2*L_1+ L_4*L_7-L_7*L_4)$,

$-iL_4=m(L_5*L_1-L_1*L_5+ L_7*L_3-L_3*L_7+ L_6*L_2-L_2*L_6)$,

$-iL_5=m(L_7*L_2-L_2*L_7+ L_3*L_6-L_6*L_3+ L_1*L_4-L_4*L_1)$,

$-iL_6=m(L_1*L_7-L_7*L_1+ L_2*L_4-L_4*L_2+ L_5*L_3-L_3*L_5)$,

$-iL_7=m(L_3*L_4-L_4*L_3+ L_6*L_1-L_1*L_6+ L_2*L_5-L_5*L_2)$,

причём $m=1/3$.

$L=-i*(L_1+ L_2+ L_3+ {}_4+ L_5+ L_6+L_7)$

и

$L^2= L_1^2+ L_2^2+ L_3^2+ L_4^2+ L_5^2+ L_6^2+ L_7^2=6I$.

Возведём L в целую положительную степень. При этом:

$-L^2/7^0$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	***-6***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
2	***1***	***-6***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
3	***1***	***1***	***-6***	***1***	***1***	***1***	***1***
4	***1***	***1***	***1***	***-6***	***1***	***1***	***1***
5	***1***	***1***	***1***	***1***	***-6***	***1***	***1***
6	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-6***	***1***
7	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-6***

$-iL^3/7^1$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***
2	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***
3	***-1***	***1***	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***
4	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***
5	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***0***	***1***	***-1***
6	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***
7	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***

$L^4/7^1$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	***-6***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
2	***1***	***-6***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
3	***1***	***1***	***-6***	***1***	***1***	***1***	***1***
4	***1***	***1***	***1***	***-6***	***1***	***1***	***1***
5	***1***	***1***	***1***	***1***	***-6***	***1***	***1***
6	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-6***	***1***
7	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-6***

$-iL^5/7^2$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***
2	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***
3	***-1***	***1***	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***
4	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***
5	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***0***	***1***	***-1***
6	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***
7	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***

Очевидно, что без учёта коэффициентов чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют две величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом эти числа приобретают 2^n-1-мерный векторный характер, среди которых выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел.

У семимерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_7^2=6I,$

где I - единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Приведем ещё несколько примеров.

$$L=L^3/7=L^5/7^2=\ldots \quad \left\| \begin{matrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{matrix} \right\| \quad -L^2=-L^4/7=-L^6/7^2\ldots \quad \left\| \begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix} \right\|$$

$$p=p^3/7^2=p^5/7^4=\ldots \quad \left\| \begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix} \right\| \quad -p^2/7=-p^4/7^3=-L^6/7^5=\ldots \quad \left\| \begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix} \right\|$$

$$-(L/7)p=-(L^3/7^4)p^3=\ldots \quad \left\| \begin{matrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{matrix} \right\| \quad -(L^2/7^2)p^2=-(L^4/7^5)p^4=\ldots \quad \left\| \begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix} \right\|$$

(квадрат модуля)
-(p+iL)(p-iL)/(7+1)=

$$\begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

(теорема Пифагора)
$(p^2+L^2)/(-7-1)=$

$$\begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

определители

$/L/=0, \dots /L^n/=0,$ $/p/=0, \dots /p^n/=0$

Мы построили матричную аналогию комплексных чисел.

В пятнадцатимерной векторной алгебре векторное произведение двух векторов можно записать в виде суммы ста пяти величин вида:

$(a_ib_j-a_jb_i)\boldsymbol{e}_k$,

по семь компонент в каждой координате (7*15=105) в соответствии с таблицей:

1,2,3	***1**,4,5*	***1**,7,6*	***1**,8,9*	***1**,11,10*	***1**,13,12*	***1**,14,15*
***2**,4,6*	***2**,5,7*	***2**,3,1*	***2**,8,10*	***2**,14,12*	***2**,15,13*	***2**,9,11*
***3**,6,5*	***3**,1,2*	***3**,4,7*	***3**,8,11*	***3**,13,14*	***3**,10,9*	***3**,15,12*
4,5,1	*4,7,3*	***4**,6,2*	***4**,8,12*	***4**,9,13*	***4**,11,15*	***4**,10,14*
***5**,7,2*	***5**,3,6*	***5**,1,4*	***5**,8,13*	***5**,10,15*	***5**,14,11*	***5**,12,9*
***6**,1,7*	***6**,2,4*	***6**,5,3*	***6**,8,14*	***6**,15,9*	***6**,12,10*	***6**,11,13*
7,3,4	*7,6,1*	*7,2,5*	*7,8,15*	*7,12,11*	*7,9,14*	*7,13,10*
***8**,9,1*	***8**,10,2*	***8**,11,3*	***8**,12,4*	***8**,13,5*	***8**,14,6*	***8**,15,7*
9,11,2	***9**,13,4*	***9**,14 ,7*	***9**,1,8*	***9**,3,10*	***9**,5,12*	***9**,6,15*
***10**,14,4*	***10**,15,5*	***10** ,9 ,3*	***10**,2,8*	***10**,6,12*	***10**,7,13*	***10**,1,11*
***11**,13,6*	***11**,10,1*	***11**,15,4*	***11**,3,8*	***11**,5,14*	***11**,2,9*	***11**,7,12*
***12**,9,5*	***12**,11,7*	***12**,10,6*	***12**,4,8*	***12**,1,13*	***12**,3,15*	***12**,2,14*
***13**,10,7*	***13**,14,3*	***13**,12,1*	***13**,5,8*	***13**,2,15*	***13**,6,11*	***13**,4,9*
***14**,15,1*	***14**,12,2*	***14**,11,5*	***14**,6,8*	***14**,7,9*	***14**,4,10*	***14**,3,13*
***15**,12,3*	***15**,9,6*	***15**,13,2*	***15**,7,8*	***15**,4,11*	***15**,1,14*	***15**,5,10*

где ***i**,j,k* циклически повторяются для каждой величины, так что они создают определители третьего порядка.

Например, три величины ***1,2,3; 2,3,1; 3,1,2*** дают определитель |***1,2,3***|. В результате векторное произведение двух векторов в пятнадцатимерной алгебре может быть записано в виде суммы сорока девяти определителей третьего порядка, семь из которых (с восьмой координатой, например ***1, 8, 9***) повторяются трижды (49=28+3*7). При этом орт $\boldsymbol{e_8}$ является общим ортом для всех семи пространств, так что имеется 35 непримитивных определителей

[ab]=

=	***|1, 2, 3|***	+	***|2, 8,10|***	+	***| 3,10, 9|***	+	***|8, 9, 1|***	+	***| 9,11, 2|***	+	***|10, 1,11|***	+	***|11, 3, 8|***
+	***|2, 4, 6|***	+	***|4, 8,12|***	+	***| 6,12,10|***	+	***|8,10, 2|***	+	***|10,14 ,4|***	+	***|12, 2,14|***	+	***|14, 6, 8|***
+	***|3, 6, 5|***	+	***|6, 8,14|***	+	***| 5,14,11|***	+	***|8,11, 3|***	+	***|11,13 ,6|***	+	***|14, 3,13|***	+	***|13, 5, 8|***
+	***|4, 5, 1 |***	+	***|5, 8,13|***	+	***| 1,13,12|***	+	***|8,12, 4|***	+	***|12, 9, 5|***	+	***|13, 4, 9|***	+	***| 9, 1, 8|***
+	***|5, 7, 2|***	+	***|7, 8,15|***	+	***| 2,15,13|***	+	***|8,13, 5|***	+	***|13,10, 7|***	+	***|15, 5,10|***	+	***|10, 2, 8|***
+	***| 6, 1, 7|***	+	***| 1, 8, 9|***	+	***| 7, 9,14|***	+	***| 8,14, 6|***	+	***|14,15, 1|***	+	***| 9, 6,15|***	+	***|15, 7, 8|***
+	***|7, 3, 4|***	+	***|3, 8,11|***	+	***| 4,11,15|***	+	***| 8,15, 7|***	+	***|15,12, 3|***	+	***|11, 7,12|***	+	***|12, 4,8|***

Возможна также укороченная (несимметричная) запись векторного произведения двух векторов, которая имеет вид:

[a,b]=	***|1,2,3|***	+	***3*|1,8, 9|***	+	***|1,11,10|***	+	***|1,13,12|***	+	***|1,14,15|***	+
	|2,4,6|	+	***3*|2,8,10|***	+	***|2,14,12|***	+	***|2,15,13|***	+	***|2, 9,11 |***	+
	|3,6,5|	+	***3*|3,8,11|***	+	***|3,13,14|***	+	***|3,10, 9|***	+	***|3,15,12|***	+
	|4,5,1|	+	***3*|4,8,12|***	+	***|4, 9,13|***	+	***|4,11,15|***	+	***|4,10,14|***	+
	|5,7,2|	+	***3*|5,8,13|***	+	***|5,10,15|***	+	***|5,14,11|***	+	***|5,12, 9 |***	+
	|6,1,7|	+	***3*|6,8,14|***	+	***|6,15, 9|***	+	***|6,12,10|***	+	***|6,11,13|***	+
	|7,3,4|	+	***3*|7,8,15|***	+	***|7,12,11|***	+	***|7, 9,14|***	+	***|7,13,10|***	,

поскольку суммируются компоненты с восьмой координатой:

|1, 8, 9|+|8, 9, 1|+| 9, 1, 8|=3*|1, 8, 9|,
|2, 8,10|+|8,10, 2|+|10, 2, 8|=3*|2, 8, 10|,
|3, 8,11|+|8,11, 3|+|11, 3, 8|=3*|3, 8, 11|,
|4, 8,12|+|8,12, 4|+|12, 4, 8|=3*|4, 8,12|,
|5, 8,13|+|8,13, 5|+|13, 5, 8|=3*|5, 8,13|,
|6, 8,14|+|8,14, 6|+|14, 6, 8|=3*|6, 8,14|,
|7, 8,15|+|8,15, 7|+|15, 7, 8|=3*|7, 8, 15|.

Тензор структурных констант и сумма операторов момента импульса имеют вид:

-iL	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
1	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
2	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
3	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
4	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*
5	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
6	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
7	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
8	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*
9	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
10	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
11	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
12	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*
13	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*1*
14	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*
15	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*

или в расширенном виде

$-iL_r$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
1	*0*	*-3*	*2*	*-5*	*4*	*7*	*-6*	*-9*	*8*	*11*	*-10*	*13*	*-12*	*-15*	*14*
2	*3*	*0*	*-1*	*-6*	*-7*	*4*	*5*	*-10*	*-11*	*8*	*9*	*14*	*15*	*-12*	*-13*
3	*-2*	*1*	*0*	*-7*	*6*	*-5*	*4*	*-11*	*10*	*-9*	*8*	*15*	*-14*	*13*	*-12*
4	*5*	*6*	*7*	*0*	*-1*	*-2*	*-3*	*-12*	*-13*	*-14*	*-15*	*8*	*9*	*10*	*11*
5	*-4*	*7*	*-6*	*1*	*0*	*3*	*-2*	*-13*	*12*	*-15*	*14*	*-9*	*8*	*-11*	*10*
6	*-7*	*-4*	*5*	*2*	*-3*	*0*	*1*	*-14*	*15*	*12*	*-13*	*-10*	*11*	*8*	*-9*
7	*6*	*-5*	*-4*	*3*	*2*	*-1*	*0*	*-15*	*-14*	*13*	*12*	*-11*	*-10*	*9*	*8*
8	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*0*	*-1*	*-2*	*-3*	*-4*	*-5*	*-6*	*-7*
9	*-8*	*11*	*-10*	*13*	*-12*	*-15*	*14*	*1*	*0*	*3*	*-2*	*5*	*-4*	*-7*	*6*
10	*-11*	*-8*	*9*	*14*	*15*	*-12*	*-13*	*2*	*-3*	*0*	*1*	*6*	*7*	*-4*	*-5*
11	*10*	*-9*	*-8*	*15*	*-14*	*13*	*-12*	*3*	*2*	*-1*	*0*	*7*	*-6*	*5*	*-4*
12	*-13*	*-14*	*-15*	*-8*	*9*	*10*	*11*	*4*	*-5*	*-6*	*-7*	*0*	*1*	*2*	*3*
13	*12*	*-15*	*14*	*-9*	*-8*	*-11*	*10*	*5*	*4*	*-7*	*6*	*-1*	*0*	*-3*	*2*
14	*15*	*12*	*-13*	*-10*	*11*	*-8*	*-9*	*6*	*7*	*4*	*-5*	*-2*	*3*	*0*	*-1*
15	*-14*	*13*	*12*	*-11*	*-10*	*9*	*-8*	*7*	*-6*	*5*	*4*	*-3*	*-2*	*1*	*0*

Они определяют векторное произведение двух векторов. Матрица суммы операторов момента импульса $\boldsymbol{L=(L_1,L_2,\ldots,L_{15})}$ может быть представлена в виде суммы пятнадцати компонент. Матрицы $\boldsymbol{L}$ и L_i 15-го порядка.

В пятнадцатимерном случае

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_i\boldsymbol{e}_i b_j\boldsymbol{e}_j]=a_i b_j[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k]=\sigma_{ij}{}^k a_i b_j\boldsymbol{e}_k;$

при последовательности чисел

$\boldsymbol{e}_i a_j b_k$ = 1,2,3; 2,4,6; 3,6,5; 4,5,1; 5,7,2; 6,1,7; 7,3,4;
1,8,9; 2,8,10; 3,8,11; 4,8,12; 5,8,13; 6,8,14; 7,8,15;
1,11,10; 2,14,12; 3,13,14; 4,9,13; 5,10,15; 6,15,9; 7,12,11;
1,13,12; 2,15,13; 3,10,9; 4,11,15; 5,14,11; 6,12,10; 7,9,14;
1,14,15; 2,9,11; 3,15,12; 4,10,14; 5,12,9; 6,11,13; 7,13,10

$\sigma_{ij}{}^k=1;$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}{}^k=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}{}^k=0.$

При этом тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ является совершенно антисимметричным единичным *15*-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Отметим, что подстановки на множестве индексов *1,2,…,15* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица системы подстановки индексов:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*1*	*3*	*8*	*10*	*12*	*14*	*13*	*15*	*9*	*11*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*7*	*4*	*8*	*11*	*14*	*13*	*9*	*10*	*15*	*12*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*2*	*6*	*8*	*12*	*13*	*9*	*15*	*11*	*10*	*14*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*4*	*1*	*8*	*13*	*15*	*10*	*11*	*14*	*12*	*9*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*3*	*5*	*8*	*14*	*9*	*15*	*10*	*12*	*11*	*13*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*	*8*	*15*	*11*	*12*	*14*	*9*	*13*	*10*

Замечательны свойства (суммы операторов момента импульса) тензора структурных констант:
- во-первых, суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных - симметричны;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1;
- все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные (кроме 0) - L^2;
- целые степени матрицы определяются двумя числами;
- матрицы L определяют векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L и её степеней равен нулю.

Приведем ещё несколько примеров.

$$L=L^3/7=L^5/7^2=\dots \quad \left\|\begin{matrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{matrix}\right\| \quad -L^2=-L^4/7=-L^6/7^2\dots \quad \left\|\begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix}\right\|$$

$$p=p^3/7^2=p^5/7^4=\dots \quad \left\|\begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix}\right\| \quad -p^2/7=-p^4/7^3=-L^6/7^5=\dots \quad \left\|\begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix}\right\|$$

$$-(L/7)p=-(L^3/7^4)p^3=\dots \quad \left\|\begin{matrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{matrix}\right\| \quad -(L^2/7^2)p^2=-(L^4/7^5)p^4=\dots \quad \left\|\begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix}\right\|$$

(квадрат модуля)

$$-(p+iL)(p-iL)/(7+1)= \quad \left\|\begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix}\right\|$$

(теорема Пифагора)

$$(p^2+L^2)/(-7-1)= \quad \left\|\begin{matrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{matrix}\right\|$$

определители

$/L/=0, \dots /L^n/=0,$

определители

$/p/=0, \dots /p^n/=0$

Мы построили семимерную матричную аналогию комплексных чисел.

Скалярное и векторное произведения двух векторов в координатной форме записи представлены в таблице, приведенной ниже.

Эта таблица фиксирует векторное произведение двух векторов и покоординатную запись пятнадцати операторов момента импульса L_i *(i=1, 2,…, 15)*.

(ab)=	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
[ab]=															
	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$,
	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$,
	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$,
	$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$,
	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$,
	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$,
	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$,
	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_2b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_4b_{12}$	$+a_{12}b_4$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$,
	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_4b_{13}$	$+a_{13}b_4$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$	$-a_8b_1$	$+a_1b_8$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$,
	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_5b_{15}$	$+a_{15}b_5$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$	$-a_8b_2$	$+a_2b_8$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$,
	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_1b_{10}$	$+a_{10}b_1$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$	$-a_8b_3$	$+a_3b_8$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$,
	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_7b_{11}$	$+a_{11}b_7$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$	$-a_8b_4$	$+a_4b_8$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$,
	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_3b_{14}$	$+a_{14}b_3$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$	$-a_8b_5$	$+a_5b_8$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$,
	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_2b_{12}$	$+a_{12}b_2$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$	$-a_8b_6$	$+a_6b_8$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$,
	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_6b_9$	$+a_9b_6$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$	$-a_8b_7$	$+a_7b_8$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$.

причем

$-iL_1=$	$m[L_2L_3]$	$+ [L_4L_5]$	$+ [L_7L_6]$	$+ n[L_8L_9]$	$+ [L_{11}L_{10}]$	$+ [L_{13}L_{12}]$	$+ [L_{14}L_{15}]$,
$-iL_2=$	$m[L_4L_6]$	$+ [L_5L_7]$	$+ [L_3L_1]$	$+ n[L_8L_{10}]$	$+ [L_{14}L_{12}]$	$+ [L_{15}L_{13}]$	$+ [L_9L_{11}]$,
$-iL_3=$	$m[L_6L_5]$	$+ [L_1L_2]$	$+ [L_4L_7]$	$+ n[L_8L_{11}]$	$+ [L_{13}L_{14}]$	$+ [L_{10}L_9]$	$+ [L_{15}L_{12}]$,
$-iL_4=$	$m[L_5L_1]$	$+ [L_7L_3]$	$+ [L_6L_2]$	$+ n[L_8L_{12}]$	$+ [L_9L_{13}]$	$+ [L_{11}L_{15}]$	$+ [L_{10}L_{14}]$,
$-iL_5=$	$m[L_7L_2]$	$+ [L_3L_6]$	$+ [L_1L_4]$	$+ n[L_8L_{13}]$	$+ [L_{10}L_{15}]$	$+ [L_{14}L_{11}]$	$+ [L_{12}L_9]$,
$-iL_6=$	$m[L_1L_7]$	$+ [L_2L_4]$	$+ [L_5L_3]$	$+ n[L_8L_{14}]$	$+ [L_{15}L_9]$	$+ [L_{12}L_{10}]$	$+ [L_{11}L_{13}]$,
$-iL_7=$	$m[L_3L_4]$	$+ [L_6L_1]$	$+ [L_2L_5]$	$+ n[L_8L_{15}]$	$+ [L_{12}L_{11}]$	$+ [L_9L_{14}]$	$+ [L_{13}L_{10}]$,
$-iL_8=$	$(k[L_9L_1]$	$+ [L_{10}L_2]$	$+ [L_{11}L_3]$	$+ [L_{12}L_4]$	$+ [L_{13}L_5]$	$+ [L_{14}L_6]$	$+ [L_{15}L_7])$,
$-iL_9=$	$m[L_3L_{10}]$	$+ [L_5L_{12}]$	$+ [L_6L_{15}]$	$+ n[L_1L_8]$	$+ [L_{11}L_2]$	$+ [L_{13}L_4]$	$+ [L_{14}L_7]$,
$-iL_{10}=$	$m[L_6L_{12}]$	$+ [L_7L_{13}]$	$+ [L_1L_{11}]$	$+ n[L_2L_8]$	$+ [L_{14}L_4]$	$+ [L_{15}L_5]$	$+ [L_9L_3]$,
$-iL_{11}=$	$m[L_5L_{14}]$	$+ [L_2L_9]$	$+ [L_7L_{12}]$	$+ n[L_3L_8]$	$+ [L_{13}L_6]$	$+ [L_{10}L_1]$	$+ [L_{15}L_4]$,
$-iL_{12}=$	$m[L_1L_{13}]$	$+ [L_3L_{15}]$	$+ [L_2L_{14}]$	$+ n[L_4L_8]$	$+ [L_9L_5]$	$+ [L_{11}L_7]$	$+ [L_{10}L_6]$,
$-iL_{13}=$	$m[L_2L_{15}]$	$+ [L_6L_{11}]$	$+ [L_4L_9]$	$+ n[L_5L_8]$	$+ [L_{10}L_7]$	$+ [L_{14}L_3]$	$+ [L_{12}L_1]$,
$-iL_{14}=$	$m[L_7L_9]$	$+ [L_4L_{10}]$	$+ [L_3L_{13}]$	$+ n[L_6L_8]$	$+ [L_{15}L_1]$	$+ [L_{12}L_2]$	$+ [L_{11}L_5]$,
$-iL_{15}=$	$m[L_4L_{11}]$	$+ [L_1L_{14}]$	$+ [L_5L_{10}]$	$+ n[L_7L_8]$	$+ [L_{12}L_3]$	$+ [L_9L_6]$	$+ [L_{13}L_2]$,

где L_i - пятнадцать антисимметричных пятнадцатимерных матриц операторов момента импульса, $[L_i L_j]=L_i L_j - L_j L_i$ - коммутаторы, причём

$m=3/25,\ n=11/3,\ k=1/11.$

$L=L_1+L_2+\ldots+L_{15},$

$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_{15}^2=14I.$

Трехмерное и семимерное векторные исчисления являются частным случаем пятнадцатимерной векторной алгебры. Скалярное произведение двух векторов определяется скаляром:

$(\boldsymbol{ab})=(a_i\boldsymbol{e}_i b_k\boldsymbol{e}_k)=a_i b_k(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k)=g_{ik}a_i b_k,$

где g_{ik} - метрический 15-тензор, равный единичной матрице.

Очевидно, что свойства пятнадцатимерной векторной алгебры определяются векторным произведением двух векторов, которое повторяет свойства определителей, т.е.:

1. векторное произведение двух векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель;
2. векторное произведение двух векторов изменяет знак при перестановке векторов;
3. векторное произведение двух векторов дистрибутивно:

$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}]$;

4. если два вектора в векторном произведении компланарны, то это произведение равно нулю и т.д.

Модулю векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно сопоставить скаляр, равный площади построенного на них параллелограмма

$[\boldsymbol{ab}]=ab\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$

Приведем несколько примеров.

	0	-i	i	-i	i	i	-i	-i	i	i	-i	i	-i	-i	i
	i	0	-i	-i	-i	i	i	-i	-i	i	i	i	i	-i	-i
	-i	i	0	-i	i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	i	-i
	i	i	i	0	-i	-i	-i	-i	-i	-i	-i	i	i	i	i
	-i	i	-i	i	0	i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	-i	i
	-i	-i	i	i	-i	0	i	-i	i	i	-i	-i	i	i	-i
	i	-i	-i	i	i	-i	0	-i	-i	i	i	-i	-i	i	i
$-iL=L^3/i5=L^5/i5^2=\ldots$	i	i	i	i	i	i	i	0	-i	-i	-i	-i	-i	-i	-i
	-i	i	-i	i	-i	-i	i	i	0	i	-i	i	-i	-i	i
	-i	-i	i	i	i	-i	-i	i	-i	0	i	i	i	-i	-i
	i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	0	i	-i	i	-i
	-i	-i	-i	-i	i	i	i	i	-i	-i	-i	0	i	i	i
	i	-i	i	-i	-i	-i	i	i	i	-i	i	-i	0	-i	i
	i	i	-i	-i	i	-i	-i	i	i	i	-i	-i	i	0	-i
	-i	i	i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	-i	i	0

	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
$-L^2=-L^4/15=L^6/15^2=\ldots$	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

При этом

$$\boldsymbol{p=p^3/15^2=p^5/15^4=\ldots-p^2/15=-p^4/15^3=L^6/15^5=\ldots-(p+iL)(p-iL)/16=-(p^2+L^2)/16=\ldots-(L^2/15^2)p^2=-/15^5)p^4=-L^2}$$
$$\boldsymbol{-(L/15)p=-L^3/(15^4)p=-L^5/(15^7)p^5 \ldots =L\ /L/=0\ldots/L^n/=0,\ /p/=0,\ \ldots\ /p^n/=0.}$$

Очевидно, что без учёта коэффициентов чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют две числовые величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1-мерный векторный характер, среди которых выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел.

У 15-мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2=L_1^{\,2}+L_2^{\,2}+\ldots.+L_{15}^{\,2}=14I,$$

где I - единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса. Матрица, составляющая сумму операторов момента импульса, антисимметрична, причём этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i:

$$L^2\, L_i^{\,2} - L_i\, L^2=0\ (i=1,2,\ldots,15),$$

что также характеризует закон сохранения момента импульса.

Произведения трех векторов

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны следующие типы произведений:

1. ***a(bc)*** **-** простейшее произведение трех векторов;
2. ***(a[bc])*** **-** смешанное произведение трех векторов;
3. ***[a[bc]]*** **-** двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение трех векторов ***a(bc)*** компланарно с третьим вектором, т.е. ***a(bc)≠(ab)c***, так что векторные n-мерные $(n=1,3,7,15,\ldots)$ алгебры не ассоциативны.

Смешанное произведение

(a[bc])=(abc)

получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию:

$$\boldsymbol{(abc)}=((a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_n\boldsymbol{e}_n)*\sigma_{ij}^{\ k}b_ic_j\boldsymbol{e}_k);$$

т.е. смешанное произведение трех векторов в одномерном случае равно нулю, в трехмерном случае - определяется одним определителем третьего порядка, в семимерном - суммой семи определителей, а в пятнадцатимерном - суммой тридцати пяти определителей третьего порядка, причем:

- в ***трехмерном*** случае

$$\boldsymbol{(abc)} = \quad |1,2,3|,$$

- в ***семимерном*** случае

$$\boldsymbol{(abc)} = |1,2,3| \quad +|2,4,6| \quad +|3,6,5| \quad +|4,5,1| \quad +|5,7,2| \quad +|6,1,7| \quad +|7,3,4|,$$

- в ***пятнадцатимерном*** случае

(abc)=

=	$\|1, 2, 3\|$	+	$\|2, 8,10\|$	+	$\|3,10,9\|$	+	$\|8, 9, 1\|$	+	$\|9,11, 2\|$	+	$\|10,1,11\|$	+	$\|11,3, 8\|$
+	$\|2, 4, 6\|$	+	$\|4, 8,12\|$	+	$\|6,12,10\|$	+	$\|8,10, 2\|$	+	$\|10,14,4\|$	+	$\|12,2,14\|$	+	$\|14, 6, 8\|$
+	$\|3, 6, 5\|$	+	$\|6, 8,14\|$	+	$\|5,14,11\|$	+	$\|8,11, 3\|$	+	$\|11,13,6\|$	+	$\|14,3,13\|$	+	$\|13, 5, 8\|$
+	$\|4, 5, 1\|$	+	$\|5, 8,13\|$	+	$\|1,13,12\|$	+	$\|8,12, 4\|$	+	$\|12,9, 5\|$	+	$\|13,4, 9\|$	+	$\|9, 1, 8\|$
+	$\|5, 7, 2\|$	+	$\|7, 8,15\|$	+	$\|2,15,13\|$	+	$\|8,13, 5\|$	+	$\|13,10,7\|$	+	$\|15,5,10\|$	+	$\|10, 2,8\|$
+	$\|6, 1 ,7\|$	+	$\|1, 8, 9\|$	+	$\|7, 9,14\|$	+	$\|8,14, 6\|$	+	$\|14,15,1\|$	+	$\|9,6,15\|$	+	$\|15, 7, 8\|$
+	$\|7, 3, 4\|$	+	$\|3, 8,11\|$	+	$\|4,11,15\|$	+	$\|8,15, 7\|$	+	$\|15,12,3\|$	+	$\|11,7,12\|$	+	$\|12, 4, 8\|$

или в сокращенной записи:

(abc) =	$\|1,2,3\|$	$+3*\|1,8, 9\|$	$+\|1,11,10\|$	$+\|1,13,12\|$	$+\|1,14,15\|$
	$+\|2,4,6\|$	$+3*\|2,8,10\|$	$+\|2,14,12\|$	$+\|2,15,13\|$	$+\|2, 9,11\|$
	$+\|3,6,5\|$	$+3*\|3,8,11\|$	$+\|3,13,14\|$	$+\|3,10, 9\|$	$+\|3,15,12\|$
	$+\|4,5,1\|$	$+3*\|4,8,12\|$	$+\|4, 9,13\|$	$+\|4,11,15\|$	$+\|4,10,14\|$
	$+\|5,7,2\|$	$+3*\|5,8,13\|$	$+\|5,10,15\|$	$+\|5,14,11\|$	$+\|5,12, 9\|$
	$+\|6,1,7\|$	$+3*\|6,8,14\|$	$+\|6,15, 9\|$	$+\|6,12,10\|$	$+\|6,11,13\|$
	$+\|7,3,4\|$	$+3*\|7,8,15\|$	$+\|7,12,11\|$	$+\|7, 9,14\|$	$+\|7,13,10\|$

В этой таблице символом $|i,j,k|$ обозначен определитель вида:

$$|i,j,k|= \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}$$

Из свойств определителей следует:

- смешанное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель:

$(\alpha \mathbf{abc})=\alpha(\mathbf{abc})$;

- смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов;
- циклическая подстановка векторов не изменяет смешанного произведения трех векторов;
- смешанное произведение трех векторов дистрибутивно, т. е.

$(\mathbf{ab(c+d)})=(\mathbf{abc})+(\mathbf{abd})$;

- если два вектора в смешанном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов для всех рассмотренных алгебр:

$([\mathbf{ab}]\mathbf{a})=([\mathbf{ba}]\mathbf{b})=0$

и т.д.

Модулю смешанного произведения ***(abc)*** трех векторов ***a, b*** и ***c*** можно сопоставить скаляр, равный объему построенного на них параллелепипеда.

Вместе с тем, пятнадцатимерное пространство можно рассматривать как совокупность тридцати пяти трехмерных пространств. При этом векторное произведение двух векторов в несимметричной форме располагает коэффициентом 3 при 8-й координате. Запись скалярного произведения двух векторов остается в прежнем виде, так что смешанное произведение трех векторов представляется аналогично формуле векторного произведения двух векторов.

Оно содержит ($49=28+3*7$) определителей третьего порядка, в случае представления 15-мерного пространства трёхмерными пространствами, что равносильно использованию тридцати пяти не повторяющихся определителей.

Двойное векторное произведение ***[a[bc]]*** трех векторов ***a, b*** и ***c*** получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор, такой что:

$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=[\mathbf{ad}]=\mathbf{f}=f_1\mathbf{e}_1+f_2\mathbf{e}_2+\ldots+f_{15}\mathbf{e}_{15}$.

В координатной форме записи для двойного векторного произведения имеет место соотношение:

- в ***трехмерном*** случае

$f_1=a_2d_3-d_2a_3=a_2(b_1c_2-b_2c_1);$

$f_2=a_3d_1-d_3a_1=a_3(b_2c_3-b_3c_2);$

$f_3=a_1d_2-d_1a_2=a_1(b_3c_1-b_1c_3);$

т.е. $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b(ca)-(ab)c}$;

- в ***семимерном*** случае для первой координаты

$f_1=a_2d_3-a_3d_2+a_4d_5-a_5d_4+a_7d_6-a_6d_7=$

$=a_2(b_6c_5-b_5c_6+b_1c_2-b_2c_1+b_4c_7-b_7c_4)-a_3(b_4c_6-b_6c_4+b_5c_7-b_7c_5+b_3c_1-b_1c_3)+$

$+a_4(b_7c_2-b_2c_7+b_3c_6-b_6c_3+b_1c_4-b_4c_1)-a_5(b_5c_1-b_1c_5+b_7c_3-b_2c_6+b_6c_2-b_2c_6)+$

$+a_7(b_1c_7-b_7c_1+b_2c_4-b_4c_2+b_5c_3-b_3c_5)-a_6(b_3c_4-b_4c_3+b_6c_1-b_1c_6+b_2c_5-b_5c_2),$

т.е. $f_1=b_1\mathbf{(ca)-(ab)}c_1+[\mathbf{abc}]_1$ где $[\mathbf{abc}]_1=|2,4,7|+|3,7,5|+|4,3,6|+|6,5,2|$.

Аналогично для других координат

$f_2=b_2\mathbf{(ca)-(ab)}c_2+[\mathbf{abc}]_2$, $[\mathbf{abc}]_2=|4,5,3|+|6,3,7|+|5,6,1|+|1,7,4|$,

$f_3=b_3\mathbf{(ca)-(ab)}c_3+[\mathbf{abc}]_3$, $[\mathbf{abc}]_3=|6,1,4|+|5,4,2|+|1,5,7|+|7,2,6|$,

$f_4=b_4\mathbf{(ca)-(ab)}c_4+[\mathbf{abc}]_4$, $[\mathbf{abc}]_4=|5,7,6|+|1,6,3|+|7,1,2|+|2,3,5|$,

$f_5=b_5\mathbf{(ca)-(ab)}c_5+[\mathbf{abc}]_5$, $[\mathbf{abc}]_5=|7,3,1|+|2,1,6|+|3,2,4|+|4,6,7|$,

$f_6=b_6\mathbf{(ca)-(ab)}c_6+[\mathbf{abc}]_6$, $[\mathbf{abc}]_6=|1,2,5|+|7,5,4|+|2,7,3|+|3,4,1|$,

$f_7=b_7\mathbf{(ca)-(ab)}c_7+[\mathbf{abc}]_7$, $[\mathbf{abc}]_7=|3,6,2|+|4,2,1|+|6,4,5|+|5,1,3|$.

Таким образом, в семимерном случае окончательно напишем

$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b(ca)-(ab)c}+[\mathbf{abc}]$,

где вектор ***[abc]*** определяется суммой *28*-ми определителей третьего порядка, причем имеет место соотношение Якоби в виде:

$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b(ca)-(ab)c}+[\mathbf{abc}]$,

т.е. $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]+[\mathbf{b}[\mathbf{ca}]]+[\mathbf{c}[\mathbf{ab}]]=3[\mathbf{abc}]$.

Следует отметить, что подстановки

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

на множестве индексов *(1,2,3,4,5,6,7)* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя. Аналогичным образом:

[[ab]c]=b(ac)-(cb)a+[cba]=b(ac)-(cb)a-3[abc]

Назовем антисимметричную по перестановке любой пары векторов функцию трех векторов ***[abc]*** векторным произведением трех векторов, при этом двойное векторное произведение трех векторов сводится к линейной комбинации двух простейших и векторного произведения трех векторов. Из свойств определителей следует, что:

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.:

[αabc]=[αabc];

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
- векторное произведение трех векторов дистрибутивно, т.е.:

[ab(c+d)]=[abc]+[abd];

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль и т.д.

Векторным произведением ***[abc]*** трех векторов ***a, b*** и ***c*** можно назвать вектор

$[abc]=[a_i\mathbf{e_i}b_j\mathbf{e_j}c_k\mathbf{e_k}]=a_ib_jc_k[\mathbf{e_i}\mathbf{e_j}\mathbf{e_k}]=\sigma_{ijk}{}^k a_ib_jc_k\mathbf{e_k}$,

определяемый совершенно антисимметричным единичным 7-тензором третьего ранга σ^{ijk}, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметрии следует, что все компоненты 7-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны. Вектор ***[abc]*** в семимерном случае определяется суммой *28*-ми определителей третьего порядка (по четыре в каждой координате), дополняющих совокупность из (*35=7+7*4)* возможных комбинаций как число сочетаний C_7^3=35. Компоненты совершенно антисимметричного единичного 7-тензора третьего ранга σ^{ijk} не изменяются по отношению к вращению семимерной системы координат.

Соотношение Якоби в семимерной алгебре не выполняется, она не ассоциативна и не является алгеброй Ли. В [3] показано, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

В ***15-мерной*** алгебре скалярное произведение двух векторов определяется скаляром:

$(\mathbf{ab})=(a_i\mathbf{e_i}b_k\mathbf{e_k})=a_ib_k(\mathbf{e_i}\mathbf{e_k})=g_{ik}a_ib_k$,

где g_{ik} - метрический 15-тензор, равный единичной матрице. Согласно сказанному выше, имеем:

[ab]	=	|1, 2, 3|	+3*	|2, 8,10|	+	| 3,10, 9|	+	| 9,11, 2|	+	|10, 1,11|
	+	|2, 4, 6|	+3*	|4, 8,12|	+	| 6,12,10|	+	|10,14 ,4|	+	|12, 2,14|
	+	|3, 6, 5|	+3*	|6, 8,14|	+	| 5,14,11|	+	|11,13 ,6|	+	|14, 3,13|
	+	|4, 5, 1 |	+3*	|5, 8,13|	+	| 1,13,12|	+	|12, 9, 5|	+	|13, 4, 9|
	+	|5, 7, 2|	+3*	|7, 8,15|	+	| 2,15,13|	+	|13,10, 7|	+	|15, 5,10|
	+	| 6, 1, 7|	+3*	| 1, 8, 9|	+	| 7, 9,14|	+	|14,15, 1|	+	| 9, 6,15|
	+	|7, 3, 4|	+3*	|3, 8,11|	+	| 4,11,15|	+	|15,12, 3|	+	|11, 7,12|

Для первой координаты f_1 двойного векторного произведения двух векторов получим следующую таблицу. Здесь 6 коммутаторов имеют отрицательные знаки перед скобками. Величины вида a_i, b_j, c_k будем обозначать цифрами, например, так:

$a_2*(b_6*c_5 - b_5*c_6)$=2, 6, 5.

Из таблицы следует, что:

2,6,5	2,1,2	2,4,7	3*(2,8,11)	-2,13,14	2, 10,9	-2,15,12
3,6,4	3,7,5	3, 1,3	3*(3,10,8)	+3,12,14	+3,13,15	3,11,9
4,7,2	4,3,6	4, 1,4	3*(4,8,13)	-4,10,15	-4,14,11	4,12,9
5,1,5	5,3,7	5,2, 6	3*(5,12,8)	5,13,9	+5,15,11	+5,14,10
6,4,3	6,1, 6	6,5,2	3*(6,15,8)	+6,11,12	6,14,9	+6,10,13
7,1,7	7,2,4	7,5,3	3*(7,8,14)	7,15,9	-7,12,10	-7,11,13
3*(8,11,2)	3*(8,13,4)	3*(8,14,7)	(8,1,8)	3*(8,3,10)	3*(8,5,12)	3*(8,6,15)
9,1,9	9,2,10	9,3,11	(9,4,12)	9,5,13	9,6,14	9,7,15
-10,6,13	10,1,10	10,4,15	3*(10,8,3)	-10,14,5	10,9,2	10,12,7
11,14,4	-11,15,5	11,9,3	3*(11,2,8)	11,6,12	11,7,13	11,1,11
12,7,10	12,3,14	12,1,12	3*(12,8,5)	12,15,2	12,11,6	12,9,4
13,9,5	13,11,7	-13,10,6	3*(13,4,8)	13,1,13	-13,3,15	13,2,14
14,12,3	14,9,6	14,13,2	3*(14,7,8)	14,4,11	14,1,14	-14,5,10
15,1,15	15, 2,12	-15,5,11	3*(15,8,6)	15,9,7	15,10,4	-15,13,3

т.е. $[abc]_1$=

=|2,4,7|	+3*|4,8,13|	+3*|8,11,2|	+|11,14,4|	+3*|14,7,8|	+|7,13,11|	+|13,2,14|
+|3,7,5|	+|5,13,9|	+|9,2,10|	+|10,4,15|	+3*|15,8,6|	-|6,11,12|	-|12,14,3|
+|4,3,6|	+3*|8,5,12|	+|11,9,3|	-|14,10,5|	+|7,15,9|	-|13,6,10|	+|2,12,15|
+|6,5,2|	+|12,9,4|	+3*|3,10,8|	-|5,15,11|	+|9,6,14|	+|10,12,7|	-|15,3,13|

$_1=$	$((a_2d_3-a_3d_2)$	$+(a_4d_5-a_5d_4)$	$+(a_7d_6-a_6d_7)$	$+3(a_8d_9-a_9d_8)$	$+(a_{11}d_{10}-a_{10}d_{11})$	$+(a_{13}d_{12}-a_{12}d_{13})$	$+(a_{14}d_{15}-a_{15}d_{14}))=$
$+a_2*$	$((b_6c_5-b_5c_6)$	$+(b_1c_2-b_2c_1)$	$+(b_4c_7-b_7c_4)$	$+3(b_8c_{11}-b_{11}c_8)$	$-(b_{13}c_{14}-b_{14}c_{13})$	$+(b_{10}c_9-b_9c_{10})$	$-(b_{15}c_{12}-b_{12}c_{15}))$
$-a_3*$	$((b_4c_6-b_6c_4)$	$+(b_5c_7-b_7c_5)$	$+(b_3c_1-b_1c_3)$	$+3(b_8c_{10}-b_{10}c_8)$	$+(b_{14}c_{12}-b_{12}c_{14})$	$+(b_{15}c_{13}-b_{13}c_{15})$	$+(b_9c_{11}-b_{11}c_9))$
$+a_4*$	$((b_7c_2-b_2c_7)$	$+(b_3c_6-b_6c_3)$	$+(b_1c_4-b_4c_1)$	$+3(b_8c_{13}-b_{13}c_8)$	$-(b_{10}c_{15}-b_{15}c_{10})$	$-(b_{14}c_{11}-b_{11}c_{14})$	$+(b_{12}c_9-b_9c_{12}))$
$-a_5*$	$((b_5c_1-b_1c_5)$	$+(b_7c_3-b_3c_7)$	$+(b_6c_2-b_2c_6)$	$+3(b_8c_{12}-b_{12}c_8)$	$+(b_9c_{13}-b_{13}c_9)$	$+(b_{11}c_{15}-b_{15}c_{11})$	$+(b_{10}c_{14}-b_{14}c_{10}))$
$+a_7*$	$((b_1c_7-b_7c_1)$	$+(b_2c_4-b_4c_2)$	$+(b_5c_3-b_3c_5)$	$+3(b_8c_{14}-b_{14}c_8)$	$+(b_{15}c_9-b_9c_{15})$	$-(b_{12}c_{10}-b_{10}c_{12})$	$-(b_{11}c_{13}-b_{13}c_{11}))$
$-a_6*$	$((b_3c_4-b_4c_3)$	$+(b_6c_1-b_1c_6)$	$+(b_2c_5-b_5c_2)$	$+3(b_8c_{15}-b_{15}c_8)$	$+(b_{12}c_{11}-b_{11}c_{12})$	$+(b_9c_{14}-b_{14}c_9)$	$+(b_{13}c_{10}-b_{10}c_{13}))$
$+a_8*$	$(3(b_{11}c_2-b_2c_{11})$	$+3(b_{13}c_4-b_4c_{13})$	$+3(b_{14}c_7-b_7c_{14})$	$+(b_1c_8-b_8c_1)$	$+3(b_3c_{10}-b_{10}c_3)$	$+3(b_5c_{12}-b_{12}c_5)$	$+3(b_6c_{15}-b_{15}c_6))$
$-a_9*$	$((b_9c_1-b_1c_9)$	$+(b_{10}c_2-b_2c_{10})$	$+(b_{11}c_3-b_3c_{11})$	$+(b_{12}c_4-b_4c_{12})$	$+(b_{13}c_5-b_5c_{13})$	$+(b_{14}c_6-b_6c_{14})$	$+(b_{15}c_7-b_7c_{15}))$
$+a_{11}*$	$((b_{14}c_4-b_4c_{14})$	$+(b_{15}c_5-b_5c_{15})$	$+(b_9c_3-b_3c_9)$	$+3(b_3c_8-b_8c_3)$	$+(b_6c_{12}-b_{12}c_6)$	$+(b_7c_{13}-b_{13}c_7)$	$+(b_1c_{11}-b_{11}c_1))$
$-a_{10}*$	$((b_{13}c_6-b_6c_{13})$	$+(b_{10}c_1-b_1c_{10})$	$+(b_{15}c_4-b_4c_{15})$	$+3(b_2c_8-b_8c_2)$	$+(b_5c_{14}-b_{14}c_5)$	$+(b_2c_9-b_9c_2)$	$+(b_7c_{12}-b_{12}c_7))$
$+a_{13}*$	$((b_9c_5-b_5c_9)$	$+(b_{11}c_7-b_7c_{11})$	$+(b_{10}c_6-b_6c_{10})$	$+3(b_5c_8-b_8c_5)$	$+(b_1c_{13}-b_{13}c_1)$	$+(b_3c_{15}-b_{15}c_3)$	$+(b_2c_{14}-b_{14}c_2))$
$-a_{12}*$	$((b_{10}c_7-b_7c_{10})$	$+(b_{14}c_3-b_3c_{14})$	$+(b_{12}c_1-b_1c_{12})$	$+3(b_4c_8-b_8c_4)$	$+(b_2c_{15}-b_{15}c_2)$	$+(b_6c_{11}-b_{11}c_6)$	$+(b_4c_9-b_9c_4))$
$+a_{14}*$	$((b_{12}c_3-b_3c_{12})$	$+(b_9c_6-b_6c_9)$	$+(b_{13}c_2-b_2c_{13})$	$+3(b_7c_8-b_8c_7)$	$+(b_4c_{11}-b_{11}c_4)$	$+(b_1c_{14}-b_{14}c_1)$	$-(b_5c_{10}-b_{10}c_5))$
$-a_{15}*$	$((b_{15}c_1-b_1c_{15})$	$+(b_{12}c_2-b_2c_{12})$	$+(b_{11}c_5-b_5c_{11})$	$+3(b_6c_8-b_8c_6)$	$+(b_7c_9-b_9c_7)$	$+(b_4c_{10}-b_{10}c_4)$	$+(b_3c_{13}-b_{13}c_3))$

или $f_1=b_1\mathbf{(ca)}\text{-}\mathbf{(ab)}c_1+\mathbf{[abc]_1}$

Аналогично для остальных координат (без учета коэффициентов пропорциональности и знаков сложения определителей):

$f_1=b_1(ca)-(ab)c_1+[abc]_1$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]1</th></tr>
<tr><td>|2,4,7|</td><td>|8,11,2|</td><td>|8,13,4|</td><td>|8,14,7|</td><td>|13,14,2|</td><td>|14,11,4|</td><td>|11,13,7|</td></tr>
<tr><td>|3,7,5|</td><td>|9,2,10|</td><td>|9,4,12|</td><td>|9,7,15|</td><td>|12,2,15|</td><td>|15,4,10|</td><td>|10,7,12|</td></tr>
<tr><td>|4,3,6|</td><td>|11,9,3|</td><td>|13,9,5|</td><td>|14,9,6|</td><td>-|14,12,3|</td><td>-|11,15,5|</td><td>-|13,10,6|</td></tr>
<tr><td>|6,5,2|</td><td>|3,10,8|</td><td>|5,12,8|</td><td>|6,15,8|</td><td>-|3,15,13|</td><td>-|5,10,14|</td><td>-|6,12,11|</td></tr>
</table>

$f_2=b_2(ca)-(ab)c_2+[abc]_2$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]2</th></tr>
<tr><td>|4,5,3|</td><td>|8,14, 4|</td><td>| 8, 15, 5|</td><td>|8, 9, 3|</td><td>|15, 9, 4|</td><td>|9, 14,5|</td><td>|14,15,3|</td></tr>
<tr><td>|6,3,7|</td><td>|10,4,12|</td><td>|10,5,13|</td><td>|10,3,11|</td><td>|13,4,11|</td><td>|11,5,12|</td><td>|12,3,13|</td></tr>
<tr><td>|5,6,1|</td><td>|14,10,6|</td><td>|15,10,7|</td><td>|9, 10, 1|</td><td>-|9,13, 6|</td><td>-|14,11,7|</td><td>-|15,12,1|</td></tr>
<tr><td>|1,7,4|</td><td>| 6, 12, 8|</td><td>|7, 13, 8|</td><td>| 1, 11,8|</td><td>-|6,11,15|</td><td>-|7,12, 9|</td><td>-|1,13,14|</td></tr>
</table>

$f_3=b_3(ca)-(ab)c_3+[abc]_3$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]3</th></tr>
<tr><td>|6,1,4|</td><td>|8,13, 6|</td><td>|8, 10, 1|</td><td>|8 ,15, 4|</td><td>|10,15,6|</td><td>|15,13,1|</td><td>|13,10,4|</td></tr>
<tr><td>|5,4,2|</td><td>|11,6,14|</td><td>|11, 1 ,9|</td><td>|11,4,12|</td><td>|9, 6,12|</td><td>|12,1,14|</td><td>|14, 4, 9|</td></tr>
<tr><td>|1,5,7|</td><td>|13,11,5|</td><td>|10,11,2|</td><td>|15,11,7|</td><td>-|15,9, 5|</td><td>-|13,12,2|</td><td>-|10, 14,7|</td></tr>
<tr><td>|7,2,6|</td><td>|5, 14,8|</td><td>|2, 9, 8|</td><td>|7, 12, 8|</td><td>-|5,12,10|</td><td>-|2,14,15|</td><td>-|7, 9, 13|</td></tr>
</table>

$f_4=b_4(ca)-(ab)c_4+[abc]_4$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]4</th></tr>
<tr><td>|5,7,6|</td><td>|8 ,9, 5|</td><td>|8, 11, 7|</td><td>|8, 10, 6|</td><td>|11,10,5|</td><td>|10, 9,7|</td><td>|9,11, 6|</td></tr>
<tr><td>|1,6,3|</td><td>|12,5,13|</td><td>|12,7,15|</td><td>|12,6,14|</td><td>|15,5,14|</td><td>|14,7,13|</td><td>|13,6,15|</td></tr>
<tr><td>|7,1,2|</td><td>|9, 12, 1|</td><td>|11,12,3|</td><td>|10,12,2|</td><td>-|10,15,1|</td><td>-|9,14, 3|</td><td>-|11,13,2|</td></tr>
<tr><td>|2,3,5|</td><td>|1,13, 8|</td><td>|3, 15, 8|</td><td>|2, 14, 8|</td><td>-|1,14,11|</td><td>-|3,13,10|</td><td>-|2, 15, 9|</td></tr>
</table>

$f_5=b_5(ca)-(ab)c_5+[abc]_5$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]5</th></tr>
<tr><td>|7,3,1|</td><td>|8,10, 7|</td><td>|8, 14,3|</td><td>| 8,12, 1|</td><td>|14,12,7|</td><td>|12, 10,3|</td><td>|10,14,1|</td></tr>
<tr><td>|2,1,6|</td><td>|13,7,15|</td><td>|13,3,11|</td><td>|13,1, 9|</td><td>|11, 7, 9|</td><td>| 9, 3,15|</td><td>|15,1,11|</td></tr>
<tr><td>|3,2,4|</td><td>|10,13,2|</td><td>|14,13,6|</td><td>|12,13,4|</td><td>- |12,11, 2|</td><td>-|10, 9,6|</td><td>-|14,15,4|</td></tr>
<tr><td>|4,6,7|</td><td>|2 ,15, 8|</td><td>|6, 11, 8|</td><td>|4, 9,8|</td><td>-|2, 9,14|</td><td>-|6, 15,12|</td><td>-|4,11,10|</td></tr>
</table>

$f_6=b_6(ca)-(ab)c_6+[abc]_6$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]6</th></tr>
<tr><td>|1,2,5|</td><td>|8, 15, 1|</td><td>|8,12, 2|</td><td>|8,11, 5|</td><td>|12,11,1|</td><td>|11,15,2|</td><td>|15,12,5|</td></tr>
<tr><td>|7,5,4|</td><td>|14,1, 9|</td><td>|14,2,10|</td><td>|14,5,13|</td><td>|10, 1,13|</td><td>|13,2, 9|</td><td>|9, 5, 10|</td></tr>
<tr><td>|2,7,3|</td><td>|15,14,7|</td><td>|12,14,4|</td><td>|11,14,3|</td><td>-|11,10,7|</td><td>-|15,13,4|</td><td>-|12, 9, 3|</td></tr>
<tr><td>|3,4,1|</td><td>|7 , 9, 8|</td><td>|4, 10, 8|</td><td>|3, 13,8|</td><td>-|7,13,12|</td><td>-|4, 9, 11|</td><td>-|3,10,15|</td></tr>
</table>

$f_7=b_7(ca)-(ab)c_7+[abc]_7$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]7</th></tr>
<tr><td>|3,6,2|</td><td>|8, 12, 3|</td><td>|8, 9, 6|</td><td>|8, 13, 2|</td><td>|9, 13, 3|</td><td>|13,12,6|</td><td>|12, 9, 2|</td></tr>
<tr><td>|4,2,1|</td><td>|15,3,11|</td><td>|15,6,14|</td><td>|15,2,10|</td><td>|14,3,10|</td><td>|10,6,11|</td><td>|11, 2,14|</td></tr>
<tr><td>|6,4,5|</td><td>|12,15,4|</td><td>|9, 15, 1|</td><td>|13,15,5|</td><td>-|13,14,4|</td><td>-|12,10,1|</td><td>-|9, 11, 5|</td></tr>
<tr><td>|5,1,3|</td><td>|4, 11, 8|</td><td>|1, 14, 8|</td><td>|5, 10, 8|</td><td>-|4, 10, 9|</td><td>-|1,11,13|</td><td>-|5,14,12|</td></tr>
</table>

$f_8=b_8(ca)-(ab)c_8+[abc]_8$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]8</th></tr>
<tr><td>|11,13,14|</td><td>|14,15,9|</td><td>|13,10,15|</td><td>|9,11,10|</td><td>|10,14,12|</td><td>|15,12,11|</td><td>|12,9,13|</td></tr>
<tr><td>|3,14,5|</td><td>|6, 9,7|</td><td>|5,15,2|</td><td>|1,10,3|</td><td>|2,12,6|</td><td>|7,11,4|</td><td>|4,13,1|</td></tr>
<tr><td>|13,3,6|</td><td>|15,6,1|</td><td>|10,5,7|</td><td>|11,1,2|</td><td>|14,2,4|</td><td>|12,7,3|</td><td>| 9, 4,5|</td></tr>
<tr><td>|6,5,11|</td><td>|1, 7,14|</td><td>|7,2,13|</td><td>|2, 3, 9|</td><td>|4,6,10|</td><td>|3,4,15|</td><td>|5,1,12|</td></tr>
</table>

$f_9=b_9(ca)-(ab)c_9+[abc]_9$

<table>
<tr><td colspan="7">$[abc]_9$</td></tr>
<tr><td>|10,12,15|</td><td>|8,10,11|</td><td>|8,12,13|</td><td>|8,15,14|</td><td>|5,6,10|</td><td>|6,3,12|</td><td>|3,5,15|</td></tr>
<tr><td>|11,15,13|</td><td>|1,11, 3|</td><td>|1,13, 5|</td><td>|1,14, 6|</td><td>|4,10,7|</td><td>|7,12,2|</td><td>|2,15,4|</td></tr>
<tr><td>|12,11,14|</td><td>-|10,1, 2|</td><td>-|12,1, 4|</td><td>-|15,1, 7|</td><td>-|6,4,11|</td><td>-|3,7,13|</td><td>-|5,2,14|</td></tr>
<tr><td>|14,13,10|</td><td>-|2, 3, 8|</td><td>-|4, 5, 8|</td><td>-|7, 6, 8|</td><td>-|11,7,5|</td><td>-|13,2,6|</td><td>-|14,4,3|</td></tr>
</table>

$f_{10}=b_{10}(ca)-(ab)c_{10}+[abc]_{10}$

<table>
<tr><td colspan="7">$[abc]_{10}$</td></tr>
<tr><td>|12,13,11|</td><td>|8,12,14|</td><td>|8,13,15|</td><td>|8,11, 9|</td><td>|7,1,12|</td><td>|1,6,13|</td><td>|6,7,11|</td></tr>
<tr><td>|14,11,15|</td><td>|2,14, 6|</td><td>|2, 15, 7|</td><td>|2, 9, 1|</td><td>|5,12,3|</td><td>|3,13,4|</td><td>|4,11,5|</td></tr>
<tr><td>|13,14, 9|</td><td>-|12, 2, 4|</td><td>-|13,2, 5|</td><td>-|11,2, 3|</td><td>-|1,5,14|</td><td>-|6,3,15|</td><td>-|7, 4, 9|</td></tr>
<tr><td>|9, 15,12|</td><td>-|4, 6, 8|</td><td>-|5, 7, 8|</td><td>-|3, 1, 8|</td><td>-|14,3,7|</td><td>-|15,4,1|</td><td>-|9, 5, 6|</td></tr>
</table>

$f_{11}=b_{11}(ca)-(ab)c_{11}+[abc]_{11}$

<table>
<tr><td colspan="7">$[abc]_{11}$</td></tr>
<tr><td>|14, 9,12|</td><td>|8,14,13|</td><td>|8,9,10|</td><td>|8,12,15|</td><td>|2,7,14|</td><td>|7,5, 9|</td><td>|5,2,12|</td></tr>
<tr><td>|13,12,10|</td><td>|3, 13,5|</td><td>|3,10,2|</td><td>|3, 15,7|</td><td>|1,14,4|</td><td>|4,9, 6|</td><td>|6,12,1|</td></tr>
<tr><td>|9, 13,15|</td><td>-|14,3,6|</td><td>-|9, 3,1|</td><td>-|12, 3,4|</td><td>-|7,1,13|</td><td>-|5,4,10|</td><td>-|2,6,15|</td></tr>
<tr><td>|15,10,14|</td><td>-|6, 5,8|</td><td>-|1, 2,8|</td><td>-|4, 7,8|</td><td>-|13,4,2|</td><td>-|10,6,7|</td><td>-|15,1,5|</td></tr>
</table>

$f_{12}=b_{12}(ca)-(ab)c_{12}+[abc]_{12}$

<table>
<tr><td colspan="7">$[abc]_{12}$</td></tr>
<tr><td>|13,15,14|</td><td>|8,13, 9|</td><td>|8,15,11|</td><td>|8,14,10|</td><td>|3,2,13|</td><td>|2,1,15|</td><td>|1,3,14|</td></tr>
<tr><td>|9, 14,11|</td><td>|4, 9, 1|</td><td>|4,11, 7|</td><td>|4,10, 6|</td><td>|7,13,6|</td><td>|6,15,5|</td><td>|5,14,7|</td></tr>
<tr><td>|15, 9,10|</td><td>-|13,4, 5|</td><td>-|15,4, 3|</td><td>-|14,4, 2|</td><td>-|2, 7, 9|</td><td>-|1,6,11|</td><td>-|3,5,10|</td></tr>
<tr><td>|10,11,13|</td><td>-|5, 1, 8|</td><td>-|3, 7, 8|</td><td>-|2, 6, 8|</td><td>-|9,6, 3|</td><td>-|11,5,2|</td><td>-|10,7,1|</td></tr>
</table>

$f_{13}=b_{13}(ca)-(ab)c_{13}+[abc]_{13}$

<table>
<tr><td colspan="7">$[abc]_{13}$</td></tr>
<tr><td>|15,11, 9|</td><td>|8,15,10|</td><td>|8,11,14|</td><td>|8, 9,12|</td><td>|6,4,15|</td><td>|4,2,11|</td><td>|2,6, 9|</td></tr>
<tr><td>|10, 9,14|</td><td>|5,10, 2|</td><td>|5,14, 3|</td><td>|5,12, 1|</td><td>|3,15,1|</td><td>|1,11,7|</td><td>|7, 9,3|</td></tr>
<tr><td>|11,10,12|</td><td>-|15,5, 7|</td><td>-|11,5, 6|</td><td>-|9, 5, 4|</td><td>-|4,3,10|</td><td>-|2,1,14|</td><td>-|6,7,12|</td></tr>
<tr><td>|12,14,15|</td><td>-|7, 2, 8|</td><td>-|6, 3, 8|</td><td>-|4, 1, 8|</td><td>-|10,1,6|</td><td>-|14,7,4|</td><td>-|12,3,2|</td></tr>
</table>

$f_{14}=b_{14}(ca)-(ab)c_{14}+[abc]_{14}$

<table>
<tr><td colspan="7">$[abc]_{14}$</td></tr>
<tr><td>|9, 10,13|</td><td>|8,9,15|</td><td>|8,10,12|</td><td>|8,13,11|</td><td>|4, 3, 9|</td><td>|3,7,10|</td><td>|7,4,13|</td></tr>
<tr><td>|15,13,12|</td><td>|6,15,7|</td><td>|6,12, 2|</td><td>|6,11, 5|</td><td>|2,9, 5|</td><td>|5,10,1|</td><td>|1,13,2|</td></tr>
<tr><td>|10,15,11|</td><td>-|9, 6, 1|</td><td>-|10,6, 4|</td><td>-|13,6, 3|</td><td>-|3,2,15|</td><td>-|7,5,12|</td><td>-|4,1,11|</td></tr>
<tr><td>|11,12, 9|</td><td>-|1, 7, 8|</td><td>-|4, 2, 8|</td><td>-|3, 5, 8|</td><td>-|15,5,4|</td><td>-|12,1,3|</td><td>-|11,2,7|</td></tr>
</table>

$f_{15}=b_{15}(ca)-(ab)c_{15}+[abc]_{15}$

<table>
<tr><td colspan="7">$[abc]_{15}$</td></tr>
<tr><td>|11,14,10|</td><td>|8,11,12|</td><td>|8,14,9|</td><td>|8,10,13|</td><td>|1,5,11|</td><td>|5,4,14|</td><td>|4,1,10|</td></tr>
<tr><td>|12,10 ,9|</td><td>|7, 12, 4|</td><td>|7, 9,6|</td><td>|7, 13, 2|</td><td>|6,11,2|</td><td>|2,14,3|</td><td>|3,10,6|</td></tr>
<tr><td>|14,12,13|</td><td>-|11, 7,3|</td><td>-|14,7,1|</td><td>-|10,7, 5|</td><td>-|5,6,12|</td><td>-|4, 2,9|</td><td>-|1,3,13|</td></tr>
<tr><td>|13, 9,11|</td><td>-|3, 4, 8|</td><td>-|1, 6,8|</td><td>-|5, 2, 8|</td><td>-|12,2,1|</td><td>-|9, 3,5|</td><td>-|13,6,4|</td></tr>
</table>

Таким образом, окончательно напишем

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

где каждая компонента пятнадцатимерного вектора векторного произведения трех векторов $[abc]_i$ определяется алгебраической суммой 28 определителей третьего порядка, так что этот вектор характеризуется (28*15=420) определителями третьего порядка, отличающимися друг от друга. С учетом 35 определителей, используемых для векторного произведения двух векторов, получаем 455 определителей третьего порядка, как полное число сочетаний

$$C_{15}^3=455.$$

Последняя таблица характеризуется высокой степенью симметрии. Достаточно сказать, что каждая i-тая координата входит в неё ровно 84 раза (по 6 раз в каждой координате f_i $(j= 1,2,\ldots,15)$, кроме $i=j$, при этом очевидна симметрия в построении семи совокупностей из четырех определителей в каждой координате. Из этой таблицы следует также наличие четырех типов совокупностей определителей, составляющих векторное произведение трех векторов.

Сумма четырех определителей третьего порядка может образовывать определитель четвёртого порядка

$$|i,j,k,h|=\begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k & e_h \\ a_i & a_j & a_k & a_h \\ b_i & b_j & b_k & b_h \\ c_i & c_j & c_k & c_h \end{vmatrix}$$

тогда $[abc]$ определяется суммой семи определителей четвертого порядка.

Это сильно упрощает запись векторного произведения трех векторов. Так, сумма 28 определителей третьего порядка

<table>
<tr><th>e1</th><th>e2</th><th>e3</th><th>e4</th><th>e5</th><th>e6</th><th>e7</th></tr>
<tr><td>+|2,4,7|
+|3,7,5|
+|4,3,6|
+|6,5,2|</td><td>+|4,5,3|
+|6,3,7|
+|5,6,1|
+|1,7,4|</td><td>+|6,1,4|
+|5,4,2|
+|1,5,7|
+|7,2,6|</td><td>+|5,7,6|
+|1,6,3|
+|7,1,2|
+|2,3,5|</td><td>+|7,3,1|
+|2,1,6|
+|3,2,4|
+|4,6,7|</td><td>+|1,2,5|
+|7,5,4|
+|2,7,3|
+|3,4,1|</td><td>+|3,6,2|
+|4,2,1|
+|6,4,5|
+|5,1,3|</td></tr>
</table>

образует сумму семи определителей четвертого порядка

***[abc]*=|1,2,4,7|+|2,4,5,3|+|3,6,1,4|+|4,5,7,6|+|5,7,3,1|+|6,1,2,5|+|7,3,6,2|.**

Тогда векторное произведение трех векторов образует сумма 105-ти определителей четвертого порядка:

<table>
<tr><td>|1,2,4,7|
|2,4,5,3|
|3, ,1,4|
|4,5,7,6|
|5,7,3,1|
|6,1,2,5|
|7,3,6,2|</td><td>|1,8,11,2|
|2,8,14,4|
|3,8,13,6|
|4,8, 9,5|
|5,8,10,7|
|6,8, 15,1|
|7,8, 12, 3|</td><td>|1,8,13,4|
|2,8,15,5|
|3,8,10,1|
|4,8, 11,7|
|5,8, 14,3|
|6,8,12, 2|
|7,8, 9,6|</td><td>|1,8,14,7|
|2,8, 9,3|
|3,8 ,15,4|
|4,8,10, 6|
|5,8,12, 1|
|6,8,11, 5|
|7,8, 13, 2|</td><td>|1,13,14,2|
|2,15, 9,4|
|3,10,15,6|
|4,11,10,5|
|5,14,12,7|
|6,12,11,1|
|7, 9,13, 3|</td><td>|1,14,11,4|
|2, 9,14,5|
|3,15,13,1|
|4,10, 9,7|
|5,12,10,3|
|6,11,15,2|
|7,13,12,6|</td><td>|1,11,13,7|
|2,14,15,3|
|3,13,10,4|
|4, 9,11,6|
|5,10,14,1|
|6,15,12,5|
|7,12, 9,2|</td></tr>
<tr><td>|8,11,13,14|</td><td>|8,14,15,9|</td><td>|8,13,10,15|</td><td>|8,9,11,10|</td><td>|8,10,14,12|</td><td>|8,15,12,11|</td><td>|8,12,9,13|</td></tr>
<tr><td>|9, 10,12,15|
|10,12,13,11|
|11,14, 9,12|
|12,13,15,14|
|13,15,11, 9|
|14,9, 10,13|
|15,11,14,10|</td><td>|9, 10,2,1|
|10,12,4,2|
|11,14,6,3|
|12,13,5,4|
|13,15,7,5|
|14, 9,1,6|
|15,11,3,7|</td><td>|9, 12,4,1|
|10,13,5,2|
|11, 9,1,3|
|12,15,7,4|
|13,11,3,5|
|14,10,2,6|
|15, 14,6,7|</td><td>|9 ,15,7,1|
|10,11,3,2|
|11,12,4,3|
|12,14,6,4|
|13, 9,1,5|
|14,13,5,6|
|15,10,2,7|</td><td>|9, 5,6,10|
|10,7,1,12|
|11,2,7,14|
|12,3,2,13|
|13,6,4,15|
|14,4, 3, 9|
|15,1,5,11|</td><td>|9, 6,3,12|
|10,1,6,13|
|11,7,5, 9|
|12,2,1,15|
|13,4,2,11|
|14,3,7,10|
|15,5,4,14|</td><td>|9, 3,5,15|
|10,6,7,11|
|11,5,2,12|
|12,1,3,14|
|13,2,6, 9|
|14,7,4,13|
|15,4,1,10|</td></tr>
</table>

строго фиксируемого состава. Очевидно, что векторное произведение образуют семь определителей верхнего левого угла. Очевидна также симметрия построения таблицы:

- во-первых, по всем 28-ми рядам четко соблюдаются найденные выше подстановки индексов:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10

- во-вторых, все 28 столбиков включают по 15 определителей с двумя семиэлементными и одной одноэлементной структурами;

- в-третьих, все координаты входят в таблицу ровно 28 раз. В результате векторное произведение трёх векторов определяется суммой 105-ти не повторяющихся определителей 4-го порядка и может рассматриваться как совокупность 420=28*15 трехмерных пространств.

Равенства

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc]

или ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=3[abc]***

указывают на то, что пятнадцатимерная алгебра не является алгеброй Ли. Можно показать, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

Из свойств определителей следует, что:

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.: ***[αabc]=[αabc]***;

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

- векторное произведение трех векторов дистрибутивно, т.е.: ***[ab(c+d)]=[abc]+[abd]***;

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль.

Векторным произведением ***[abc]*** трех векторов ***a, b*** и ***c*** можно назвать вектор $[\mathbf{abc}]=[a_i\mathbf{e}_i b_j\mathbf{e}_j c_k\mathbf{e}_k]=a_i b_j c_k[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k]=\sigma_{ijk}{}^{k} a_i b_j c_k\mathbf{e}_k$,

определяемый совершенно антисимметричным единичным 15-тензором третьего ранга σ^{ijk}, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты 15-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличные от нуля лишь те, у которых все три индекса различны, так что вектор ***[abc]*** определяется суммой *420*-ти определителей третьего порядка.

Подчеркнем, что подстановки на множестве индексов ***(1,2,…,15)*** дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя, например, при указанной подстановке индексов:

3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13

т.е. последовательности индексов преобразуются в иные последовательности индексов той же системы. Подчеркнем еще раз, что:

- в ***трехмерном*** случае:

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=0***;

- в ***семимерном*** случае:

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc]

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=3[abc]***;

- в ***пятнадцатимерном*** случае:

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc]

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=3[abc]***,

причем вектор ***[abc]*** сохраняет соответствующие свойства у трех-, семи- и пятнадцатимерной алгебр, а следовательно, сохраняется вид уравнений семимерной и пятнадцатимерной алгебр для совокупностей из **(2,3,..,7)** векторов, представленных в векторной форме записи. Координатная форма записи при этом кардинально видоизменяется, однако свойства алгебр от этого не зависят, т.е. векторные соотношения семи- и пятнадцатимерной алгебр совпадают при рассмотрении произведений векторов от двух до семи. Вместе с тем, произведения векторов от восьми до пятнадцати имеют место лишь в пятнадцатимерной алгебре, только 16-й вектор в пятнадцатимерной алгебре раскладывается по пятнадцати векторам.

Уже найдены векторные алгебры, соответствующие 31-й, 63-м, 127-ми, 255-ти, 511-ти, 1023-м координатам. 2^n-1-мерные векторные алгебры расширяются вплоть до бесконечномерных алгебр. Следовательно, стоит ребром вопрос о размерности физического пространства, поскольку трехмерная векторная алгебра определила в XIX веке название трехмерной теоретической физики. **Физическое пространство не имеет размерности**. *Оно лишь отражает ту или иную степень симметрии выражений, используемых для описания явлений.*

Более симметричны алгебры высокой размерности, алгебры меньшей размерности могут рассматриваться как та или иная степень нарушения симметрии и являются их частным случаем.

Приведём таблицу структуры многомерных алгебр, отметив высокую интенсивность увеличения числа составляющих их трехмерных пространств.

$x_{n+1}=2*x_n+1$	$[ab]$, $z_{n+1}=4*z_n+x_n$	$[abc]_i$, $y_{n+1}=4*z_n$	$[abc]$, x_n*y_n	$C_n^3=x_n*y_n+z_n$
1	0	0	0	0
3	1	0	0	1
7	7	4	28	35
15	35	28	420	455
31	155	140	4340	4495
63	651	620	39060	39711
127	2667	2604	330708	333375
255	10795	10668	2720340	2731135
511	43435	43180	22064980	22108415
1023	174251	173740	177736020	177910271

Важным свойством векторных алгебр является то, что их размерность часто совпадает с рядом простых чисел Мерсенна, соответствующих совершенным числам, и, следовательно, по крайней мере, отдельные векторные алгебры имеют прямое отношение к совершенным числам. Так, например, сумма индексов систем подстановки индексов зачастую определяется совершенным числом:

- в трехмерной алгебре:

1	2	3	6
2	3	1	6
3	1	2	6
6	6	6	∑

- в семимерной алгебре:

1	2	3	4	5	6	7	28
2	4	6	5	7	1	3	28
3	6	5	1	2	7	4	28
4	5	1	7	3	2	6	28
5	7	2	3	6	4	1	28
6	1	7	2	4	3	5	28
7	3	4	6	1	5	2	28
28	28	28	28	28	28	28	∑

- в пятнадцатимерной алгебре, однако, размерность - составное число; в результате:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*120*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*1*	*3*	*8*	*10*	*12*	*14*	*13*	*15*	*9*	*11*	*120*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*7*	*4*	*8*	*11*	*14*	*13*	*9*	*10*	*15*	*12*	*120*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*2*	*6*	*8*	*12*	*13*	*9*	*15*	*11*	*10*	*14*	*120*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*4*	*1*	*8*	*13*	*15*	*10*	*11*	*14*	*12*	*9*	*120*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*3*	*5*	*8*	*14*	*9*	*15*	*10*	*12*	*11*	*13*	*120*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*	*8*	*15*	*11*	*12*	*14*	*9*	*13*	*10*	*120*
28	*28*	*28*	*28*	*28*	*28*	*28*	*56*	*84*	*84*	*84*	*84*	*84*	*84*	*84*	∑

причем таблица векторного произведения двух векторов:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*7*	*6*	*8*	*9*	*11*	*10*	*13*	*12*	*14*	*15*	*120*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*3*	*1*	*8*	*10*	*14*	*12*	*15*	*13*	*9*	*11*	*120*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*4*	*7*	*8*	*11*	*13*	*14*	*10*	*9*	*15*	*12*	*120*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*6*	*2*	*8*	*12*	*9*	*13*	*11*	*15*	*10*	*14*	*120*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*1*	*4*	*8*	*13*	*10*	*15*	*14*	*11*	*12*	*9*	*120*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*5*	*3*	*8*	*14*	*15*	*9*	*12*	*10*	*11*	*13*	*120*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*2*	*5*	*8*	*15*	*12*	*11*	*9*	*14*	*13*	*10*	*120*
8	*9*	*1*	*10*	*2*	*11*	*3*	*12*	*4*	*13*	*5*	*14*	*6*	*15*	*7*	*120*
9	*3*	*10*	*5*	*12*	*6*	*15*	*1*	*8*	*11*	*2*	*13*	*4*	*14*	*7*	*120*
10	*6*	*12*	*7*	*13*	*1*	*11*	*2*	*8*	*14*	*4*	*15*	*5*	*9*	*3*	*120*
11	*5*	*14*	*2*	*9*	*7*	*12*	*3*	*8*	*13*	*6*	*10*	*1*	*15*	*4*	*120*
12	*1*	*13*	*3*	*15*	*2*	*14*	*4*	*8*	*9*	*5*	*11*	*7*	*10*	*6*	*120*
13	*2*	*15*	*6*	*11*	*4*	*9*	*5*	*8*	*10*	*7*	*14*	*3*	*12*	*1*	*120*
14	*7*	*9*	*4*	*10*	*3*	*13*	*6*	*8*	*15*	*1*	*12*	*2*	*11*	*5*	*120*
15	*4*	*11*	*1*	*14*	*5*	*10*	*7*	*8*	*12*	*3*	*9*	*6*	*13*	*2*	*120*

Совершенные числа $s_n=2^{n-1}(2^n-1)$ можно определять по совпадению простых чисел натурального ряда чисел n и простых чисел ряда $m_n=2^n-1$, причем для упрощения вычислений этому ряду следует сопоставить рекуррентное соотношение $m_{n+1}=2m_n+1$. Оказывается, что совершенные числа также можно найти, используя укороченный ряд чисел $k_{n+1}=4k_n+3$. В этом случае $k_n= s_n+m_{n-1}$ и, следовательно,

$s_n =k_n- m_{n-1},$

что определяется таблицей:

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
m	*1*	*3*	*7*	*15*	*31*	*63*	*127*	*255*	*511*	*1023*	*2047*	*4095*	*8191*
s	*1*	*6*	*28*	*120*	*496*	*2016*	*8128*	*32640*	*130816*	*523776*	*2096128*	*8386560*	*33550336*
k	*1*	*7*	*31*	*127*	*511*	*2047*	*8191*	*32767*	*131071*	*524287*	*2097151*	*8388607*	*33554431*

Указанный порядок нахождения размерности векторных алгебр и совершенных чисел относительно прост, поскольку ряд k является чересстрочной разверткой ряда m, где последовательно используются операции умножения и сложения с целыми числами. Совершенные числа отвечают простым числам рядов чисел m и натуральных чисел в одном и том же столбце. Сдвигом влево на одну позицию рядов s и k получим эту таблицу в удобной форме записи.

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
m	*1*	*3*	*7*	*15*	*31*	*63*	*127*	*255*	*511*	*1023*	*2047*	*4095*	*8191*
s	*6*	*28*	*120*	*496*	*2016*	*8128*	*32640*	*130816*	*523776*	*2096128*	*8386560*	*33550336*	*134209536*
k	*7*	*31*	*127*	*511*	*2047*	*8191*	*32767*	*131071*	*524287*	*2097151*	*8388607*	*33554431*	*134217727*

Здесь простые числа Мерсенна сдвинуты на один шаг относительно совершенных чисел, так что совершенные числа определяются простым числом из двух соседних значений ряда чисел m:

$s_n=k_n-m_n$, $k_n=m_{n+1}*(m_n+1)+m_n$, $s_n=m_{n+1}*(m_n+1)$.

Так:

6=3*2

28=7*4

496=31*16

8128=127*64

33550336=8191*4096

... .

Достаточно знать простые числа Мерсенна, чтобы найти совершенные числа. Тот же ряд чисел определяет размерность векторных алгебр. Она определяется тем же рекуррентным соотношением, так что

$x_{n+1}=2*x_n+1$

Список литературы

1. **Коротков А. В.** Пятнадцатимерная векторная алгебра // Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: НОК, 2011. 36 с.
3. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.

УДК 512.7
Физико-математические науки

Статья посвящена вопросам построения элементов пятнадцатимерной векторной алгебры. В ней рассмотрены, в частности, способы нахождения соотношений векторного произведения двух векторов на основе известной процедуры удвоения октонионов. Установлено выражение для векторного произведения двух векторов через сумму тридцати пяти определителей третьего порядка и, следовательно, найдены свойства векторного произведения двух векторов. Получено выражение для операторов момента импульса и их суммы. Сумма операторов момента импульса совпадает с точностью до коэффициента пропорциональности со всеми нечетными степенями. Четные степени определяют симметрическую матрицу.

Ключевые слова и фразы: пятнадцатимерная векторная алгебра; векторное произведение двух векторов; сумма определителей третьего порядка; коммутатор; матрицы момента импульса; сумма операторов момента импульса; закон сохранения момента импульса.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА©

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{3\text{-}D} & \mathbf{2^m\text{-}1} & \mathbf{2n+1} \\ \mathbf{2n+1} & \mathbf{7\text{-}D} & \mathbf{2^m\text{-}1} \\ \mathbf{2^m\text{-}1} & \mathbf{2n+1} & \mathbf{15\text{-}D} \end{Vmatrix}$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в последнюю четверть XX столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчислений [2; 3].

Трехмерное и семимерное векторные исчисления обладают рядом замечательных свойств и выделяются среди евклидовых векторных пространств наличием операции векторного умножения двух векторов. Другим свойством этих алгебр является отсутствие обратного вектора и деления двух векторов друг на друга. Это, казалось бы, неприятное, свойство, однако, дало трехмерные и семимерные векторные алгебры, широко используется и дает возможность дальнейшего расширения размерности векторных алгебр.

Векторным алгебрам в принципе не свойственно наличие обратных величин и процедуры деления векторов, а, следовательно, полученный в XIX веке замечательный результат в отношении гиперкомплексных чисел с делением не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Рассмотрим в связи с этим порядок получения пятнадцатимерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел, которая дала возможность получить из алгебры одномерных чисел (действительных чисел) алгебры двух-, четырех- и восьмимерных чисел - комплексных чисел, кватернионов и октонионов Кэли.

Порядок получения комплексных чисел кватернионов и октонионов связан с процедурой удвоения. Отметим, что задача нахождения пятнадцатимерных векторных алгебр имеет неоднозначное решение. Каждое решение определяется видом процедуры удвоения, так, например, при удвоении действительных чисел можно получить двухмерные комплексные числа:

$\mathbf{ab}=(a_0b_0\text{-}b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1)$,

т.е. $\mathbf{ab}=(a_0,\ a_1)(b_0,\ b_1)=(a_0b_0\text{-}b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1)$.

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$\mathbf{ab}=\begin{array}{cc} \underline{(a_0b_0}| & -b_1a_1, \\ a_0b_1 & +b_0a_1) \end{array}$$

При удвоении комплексных чисел можно получить четырехмерные кватернионы. При этом произведением двух пар вещественных чисел $\mathbf{a}=(a_0,a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$\mathbf{ab}=(a_0b_0\text{-}b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1)$, т.е. $\mathbf{ab}=(a_0,a_1)(b_0,b_1)=(a_0b_0\text{-}b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1)$.
