

Ильюшин Юрий Валерьевич, Кравцова Алена Леонидовна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2012/1/9.html](http://www.gramota.net/materials/1/2012/1/9.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2012. № 1 (56). С. 26-37. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2012/1/](http://www.gramota.net/materials/1/2012/1/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

время задержки срабатывания манипулятора  $M_4 \tau_{зад.общ.4} = 8 + 5 = 13$  с. Такая длительность задержек времени срабатывания манипуляторов позволяет разрешить существующие конфликтные ситуации на роботизированном участке ГАП БТ, а также обеспечивает ритмичное поступление замка на манипулятор М6.

**Выводы.** Отметим, что рассмотренные в данной статье модельное управление и координация промышленными ИР могут быть интерпретированы с точки зрения построения системы решения задач работ как «вырожденные» случаи. Очевидно, что указанная модель отражала «рефлекторный» характер принятия решений промышленными ИР, так как в этих случаях процедура планирования целенаправленного поведения сводилась, в конечном счете, к детерминированной последовательности операторов-действий, что связано со спецификой дискретных производств, где роботы выполняют вспомогательные функции и особого «интеллекта» от них не требуется. Иначе обстоит дело с автономными интеллектуальными мобильными роботами. Здесь необходим комплексный подход к принятию решений, что требует углубленных исследований и различных подходов.

Использование ИР позволяет обеспечить максимальную производительность, высокое качество и технико-экономические показатели ГАП БТ.

#### Список литературы

1. Абдуллаев Г. С., Аскерова А. О. Управление ГПС для сварки бурильных труб трением // Автоматизация и современные технологии. 2001. № 3. С. 42-43
2. Tanscheit R., Scharf E. M. Experiments with the Rule-Based Self-Organizing Controller for Robotics Applications // Fuzzy Sets and Syst. 1988. № 26. P. 195-214.

УДК 681.5

Юрий Валерьевич Ильюшин, Алена Леонидовна Кравцова  
Пятигорский государственный гуманитарно-технологический университет

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>©</sup>

#### Понятие структурной устойчивости

Астатическая система может быть неустойчивой по двум причинам: неподходящий состав динамических звеньев и неподходящие значения параметров звеньев.

Системы, неустойчивые по первой причине, называются структурно неустойчивыми. Это означает, что изменением параметров системы нельзя добиться ее устойчивости, нужно менять ее структуру.

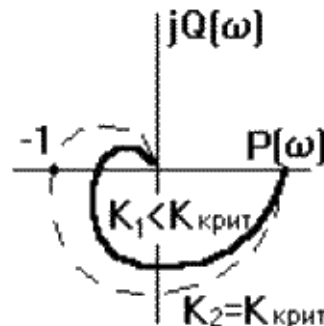


Рис. 1. Система, состоящая из любого количества инерционных и колебательных звеньев

Например, если система состоит из любого количества инерционных и колебательных звеньев, она имеет вид, показанный на Рис. 1. При увеличении коэффициента усиления системы  $K$  каждая точка ее АФЧХ удаляется от начала координат, пока при некотором значении  $K_{крит}$  АФЧХ не пересечет точку  $(-1, j0)$ . При дальнейшем увеличении  $K$  система будет неустойчива. И, наоборот, при уменьшении  $K$  такую систему, в принципе, можно сделать устойчивой, поэтому ее называют структурно устойчивой.

Если система астатическая, то  $n$  - порядок астатизма - равен количеству последовательно включенных интеграторов. При ее размыкании характеристическое уравнение системы имеет нулевые корни, поэтому при  $\omega \rightarrow \infty$  АФЧХ стремится к  $\infty$ . Например, пусть  $W_p(p) = K/(p(Tp+1))$ , тогда АФЧХ разомкнутой системы:

$$W(j, \omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2 T} = \frac{K\omega^2 T - jK\omega}{\omega^2 + \omega^4 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

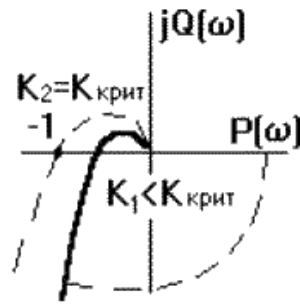


Рис. 2. АФЧХ

Так как порядок знаменателя больше порядка числителя, то при  $\omega \rightarrow 0$  имеем  $P(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $Q(\omega) \rightarrow -j\infty$ . Подобная АФЧХ представлена на Рис. 2. Так как АФЧХ терпит разрыв, трудно сказать, охватывает ли она точку  $(-1, j0)$ . В этом случае пользуются следующим приемом: если АФЧХ терпит разрыв, уходя в бесконечность при  $\omega \rightarrow 0$ , ее дополняют мысленно полуокружностью бесконечного радиуса, начинающейся на положительной вещественной полуоси и продолжающейся до АФЧХ в отрицательном направлении.

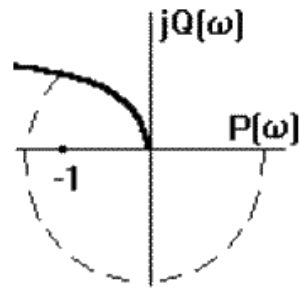


Рис. 3. АФЧХ

После этого можно применить критерий Найквиста. Как видно из рисунка, система, имеющая одно интегрирующее звено, является структурно устойчивой. Если система имеет два интегрирующих звена (порядок астатизма 2), ее АФЧХ уходит в бесконечность во втором квадранте (Рис. 3). Например, пусть  $W_p(p) = K/(p^2(Tp+1))$ , тогда АФЧХ системы:

$$W(j, \omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(j\omega T + 1)} = \frac{K}{-\omega^2 - j\omega^3 T} = \frac{-K\omega^2 + jK\omega^3 T}{\omega^4 + \omega^6 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  имеем  $P(\omega) \rightarrow -\infty$ ,  $Q(\omega) \rightarrow j\infty$ . Такая система не будет устойчива ни при каких значениях параметров, то есть она структурно неустойчива.

Структурно неустойчивую систему можно сделать устойчивой, включив в нее корректирующие звенья (например, дифференцирующие) или изменив структуру системы, например, с помощью местных обратных связей.

**Понятие запаса устойчивости**

В условиях эксплуатации параметры системы по тем или иным причинам могут меняться в определенных пределах (старение, температурные колебания и т.п.). Эти колебания параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости. Поэтому стремятся спроектировать систему так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости. Степень этого удаления называют запасом устойчивости.

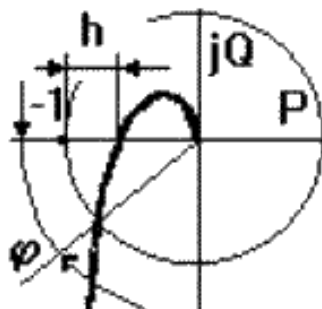


Рис. 4. Расстояние h от критической точки до точки пересечения годографом оси абсцисс

Согласно критерию Найквиста, чем дальше АФЧХ от критической точки  $(-1, j0)$ , тем больше запас устойчивости. Различают запасы устойчивости по модулю и по фазе.

Запас устойчивости по модулю характеризует удаление годографа АФЧХ разомкнутой системы от критической точки в направлении вещественной оси и определяется расстоянием  $h$  от критической точки до точки пересечения годографа с осью абсцисс (Рис. 4).

Запас устойчивости по фазе характеризует удаление годографа от критической точки по дуге окружности единичного радиуса и определяется углом  $\varphi$  между отрицательным направлением вещественной полуоси и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения годографа с единичной окружностью.

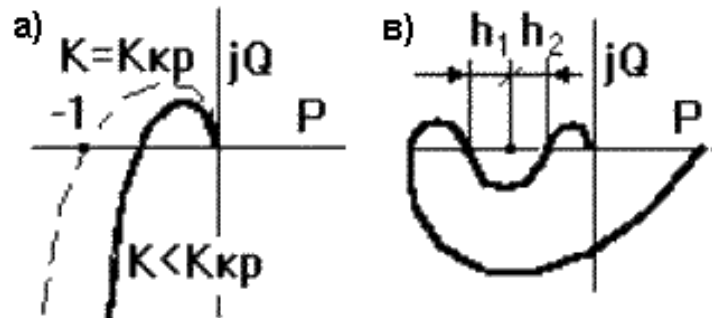


Рис. 5. АФЧХ

Как уже отмечалось, с ростом коэффициента передачи разомкнутой системы растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении  $K=K_{кр}$  АФЧХ пройдет через критическую точку (Рис. 5а) и попадет на границу устойчивости, а при  $K>K_{кр}$  замкнутая система станет неустойчива. Однако в случае АФЧХ типа 1 (получаются из-за наличия внутренних обратных связей) не только увеличение, но и уменьшение  $K$  может привести к потере устойчивости замкнутых систем (Рис. 5в). В этом случае запас устойчивости определяется двумя отрезками  $h_1$  и  $h_2$ , заключенными между критической точкой и АФЧХ.

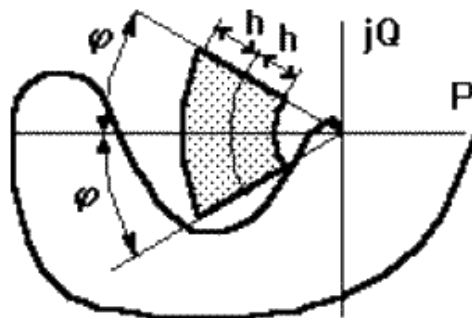


Рис. 6. АФЧХ разомкнутой системы

Обычно при создании системы задаются требуемыми запасами устойчивости  $h$  и  $\varphi$ , за пределы которых она выходить не должна. Эти пределы выставляются в виде сектора, вычерчиваемого вокруг критической точки, в который АФЧХ разомкнутой системы входить не должна (Рис. 6).

#### Анализ устойчивости по ЛЧХ

Оценку устойчивости по критерию Найквиста удобнее производить по ЛЧХ разомкнутой системы. Очевидно, что каждой точке АФЧХ будут соответствовать определенные точки ЛАЧХ и ЛФЧХ.

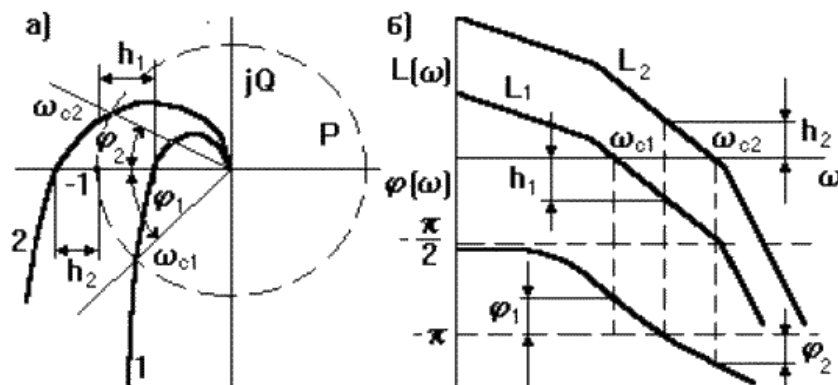


Рис. 7. Устойчивая и неустойчивая система в замкнутом состоянии

Пусть известны частотные характеристики двух разомкнутых систем (1 и 2), отличающихся друг от друга только коэффициентом передачи  $K_1 < K_2$ . Пусть первая система устойчива в замкнутом состоянии, вторая нет (Рис. 7).

Если  $W_1(p)$  - передаточная функция первой системы, то передаточная функция второй системы  $W_2(p) = K \cdot W_1(p)$ , где  $K = K_2/K_1$ . Вторую систему можно представить последовательной цепочкой из двух звеньев с передаточными функциями  $K$  (безинерционное звено) и  $W_1(p)$ , поэтому результирующие ЛЧХ строятся как сумма ЛЧХ каждого из звеньев. Поэтому ЛАЧХ второй системы:  $L_2(\omega) = 20 \lg K + L_1(\omega)$ , а ЛФЧХ:  $\varphi_2(\omega) = \varphi_1(\omega)$ .

Пересечением АФЧХ вещественной оси соответствует значение фазы  $\varphi = -\pi$ . Это соответствует точке пересечения ЛФЧХ  $\varphi = -\pi$  линии координатной сетки. При этом, как видно на АФЧХ, амплитуды  $A_1(\omega) < 1$ ,  $A_2(\omega) > 1$ , что соответствует на линейной амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) значениям  $L_1(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) < 0$  и  $L_2(\omega) > 0$ .

Сравнивая АФЧХ и линейную фазово-частотную характеристику (ЛФЧХ), можно заключить, что система в замкнутом состоянии будет устойчива, если значению ЛФЧХ  $\varphi = -\pi$  будут соответствовать отрицательные значения ЛАЧХ и наоборот. Запасам устойчивости по модулю  $h_1$  и  $h_2$ , определенным по АФЧХ, соответствуют расстояния от оси абсцисс до ЛАЧХ в точках, где  $\varphi = -\pi$ , но в логарифмическом масштабе.

Особыми точками являются точки пересечения АФЧХ с единичной окружностью. Частоты  $\omega_{c1}$  и  $\omega_{c2}$ , при которых это происходит, называют частотами среза.

В точках пересечения  $A(\omega) = 1 \Rightarrow L(\omega) = 0$  ЛАЧХ пересекает горизонтальную ось. Если при частоте среза фаза АФЧХ  $\varphi_{c1} > -\pi$  (Рис. 7а, кривая 1), то замкнутая система устойчива. На Рис. 7б это выглядит так, что пересечению ЛАЧХ горизонтальной оси соответствует точка ЛФЧХ, расположенная выше линии  $\varphi = -\pi$ . И, наоборот, для неустойчивой замкнутой системы (Рис. 7а, кривая 2)  $\varphi_{c2} < -\pi$ , поэтому при  $\omega = \omega_{c2}$  ЛФЧХ проходит ниже линии  $\varphi = -\pi$ . Угол  $\varphi_1 = \varphi_{c1} - (-\pi)$  является запасом устойчивости по фазе. Этот угол соответствует расстоянию от линии  $\varphi = -\pi$  до ЛФЧХ.

Исходя из сказанного, критерий устойчивости Найквиста по логарифмическим ЧХ, в случаях, когда АФЧХ только один раз пересекает отрезок вещественной оси  $[-\infty; -1]$ , можно сформулировать так: для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы частота, при которой ЛФЧХ пересекает линию  $\varphi = -\pi$ , была больше частоты среза.

Если АФЧХ разомкнутой системы имеет сложный вид, то ЛФЧХ может несколько раз пересекать линию  $\varphi = -\pi$ . В этом случае применение критерия Найквиста несколько усложняется. Однако во многих случаях данной формулировки критерия Найквиста оказывается достаточно.

### Точность систем

Понятие точности является центральным в теории автоматического управления, так как позволяет количественно выразить показатели качества систем. Различают точность, рассматриваемую в переходном процессе - динамическая точность, и точность в установившемся режиме - статическая точность.

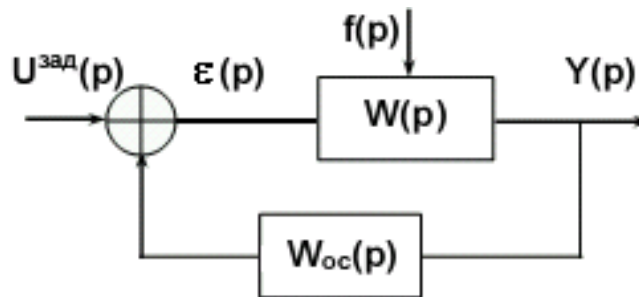


Рис. 8. Принцип САУ

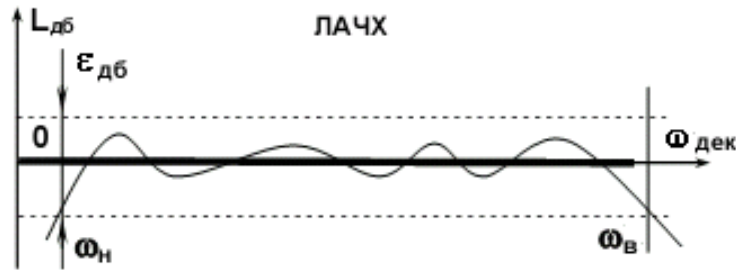
Проще всего рассмотреть понятие точности на примере следящей системы. Для этого наилучшим образом применима передаточная функция по ошибке, позволяющая записать сигнал ошибки при любом виде задающего воздействия:

$$\varepsilon(p) = W_\varepsilon(p) U^{\text{зад}}(p) + W_{\text{эф}}(p) f(p)$$

Статическая точность в следящей системе определяется при гармоническом входном воздействии с использованием передаточной функции по ошибке.

$$\varepsilon(p) = W_\varepsilon(p) U^{\text{зад}}(p), \quad W_\varepsilon(p) = 1/(1+W(p))$$

Рассмотрим логарифмическую частотную характеристику системы в установившемся режиме при гармоническом входном воздействии (Рис. 9). Жирной линией показан идеальный случай абсолютно точной системы. Реальная частотная характеристика отличается от идеальной и в некоторой полосе ( $\omega_n, \omega_b$ ) не выходит за пределы допуска  $\varepsilon$ . Такое же рассуждение справедливо и для ФЧХ. Задав допустимые границы точности по амплитуде и по фазе, получим область частот, где гарантируется данная точность - это полоса пропускания. Задавая требуемую рабочую частоту по приведенным выше формулам, можно вычислить ошибку на этой частоте при гармоническом воздействии.



**Рис. 9.** Логарифмическая частотная характеристика системы в установившемся режиме при гармоническом входном воздействии

Общий способ повышения точности (в статическом и динамическом режимах) - обеспечение следующих оценок:

$W_{зс}(p) = W(p)/(1+W(p)) \approx 1$  - мера точности воспроизведения задающего воздействия в замкнутой системе.

$W_{ос}(p) = 1/(1+W(p)) \approx 0$  - мера малости ошибки слежения.

Один из основных способов повышения точности - увеличение коэффициента  $k$  разомкнутой системы. При увеличении  $k$  оба приближённых равенства оценок выполняются всё более точно, что говорит об общем повышении точности, причём это повышение точности происходит при любой  $W(p)$ .

Однако это не значит, что можно таким образом достичь любой желаемой точности. Здесь начинает сказываться одно из фундаментальных противоречий в рамках теории управления - противоречие между точностью системы и запасом устойчивости. При чрезмерном увеличении  $k$  возможна потеря устойчивости замкнутой системы. Годограф Найквиста, не охватывающий точку  $(-1; j0)$ , но проходящий, например, из 3 квадранта во второй (см., например, кривую 1 на Рис. 9), при увеличении  $k$  «раздувается» относительно начала координат и начинает охватывать эту точку, то есть нарушается условие критерия устойчивости Найквиста. Повышение точности всегда приводит к уменьшению запаса устойчивости по амплитуде.

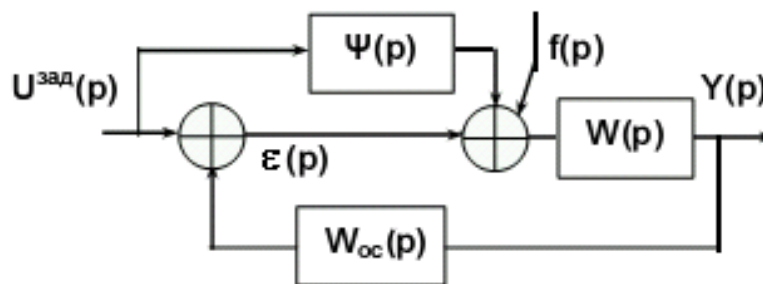
Конкретные значения точности анализируемой системы проводятся разложением  $W_{ос}(p)$  в ряд Тейлора в окрестностях  $p=0$  и анализом коэффициентов этого ряда.

Динамическая точность относится к более сложным задачам анализа систем, т.к. требует изучения всего переходного процесса. При достаточно большом значении модуля АФЧХ в разомкнутой системе передаточная функция прямой ветви имеет пренебрежимо малое значение, передаточная функция замкнутой системы будет в основном определяться цепью ОС. Если коэффициент передачи разомкнутой системы много больше единицы  $W(p)W_{ос}(p) \gg 1$  и  $|W(p)| \gg 1$ , то для замкнутой системы можно принять:

$$W_{зс}(p) = W(p)/(1+W(p)W_{ос}(p)) \approx 1/W_{ос}(p)$$

что существенно упрощает анализ системы.

Для повышения динамической точности системы обычно используется принцип комбинированного управления по задающему воздействию (принцип инвариантности).



**Рис. 10.** Динамическая система

Добавим в стандартную структуру системы дополнительную передаточную функцию  $\Psi(p) \approx 1/(W(p)W_{ос}(p))$  так, чтобы сигнал ошибки вообще не зависел от задающего воздействия (Рис. 10). Это можно выполнить введением в систему дополнительной ветви прохождения сигнала, и подобрать коэффициент передачи в этой ветви так, чтобы компенсировать нежелательный сигнал. Аналогичная операция может быть выполнена и на возмущающее воздействие  $f(p)$ .

#### Качество систем

##### Показатели качества систем управления

Требование устойчивости для системы относится к числу необходимых, но не может считаться достаточным. Система может быть устойчивой, но время затухания настолько велико или ошибка в установившемся режиме настолько большая, что практически данная система не может быть использована. Поэтому

система должна быть не только устойчивой, но иметь определенный переходный процесс, а ошибки в установившихся режимах не должны превышать допустимых.

Характер переходного процесса линейной системы в отличие от устойчивости зависит не только от параметров системы, но и от вида возмущающего (задающего) воздействия и начальных условий. Чтобы сравнивать системы по характеру переходного процесса, из возможных воздействий выбирают типовые или наиболее неблагоприятные и определяют кривую переходного процесса при нулевых начальных условиях. В качестве типовых воздействий обычно принимают единичное ступенчатое воздействие, единичный импульс, линейно нарастающее и синусоидальное воздействие. Для большинства систем наиболее неблагоприятным является воздействие вида единичной ступенчатой функции  $a(t)=1(t)$ . Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях называется переходной функцией системы. Для следящих систем обычно рассматривают переходную функцию  $H(t)$ , вызванную изменением задающего воздействия  $1(t)$ , а для систем стабилизации - переходную функцию  $H_f(t)$ , вызванную изменением возмущающего воздействия  $f(t)$ .

Точность системы в установившихся режимах оценивается с помощью статических и динамических ошибок. Эти ошибки по аналогии можно назвать показателем качества системы в установившихся режимах. Совокупность показателей качества переходного процесса и установившихся режимов называется показателями качества системы в целом.

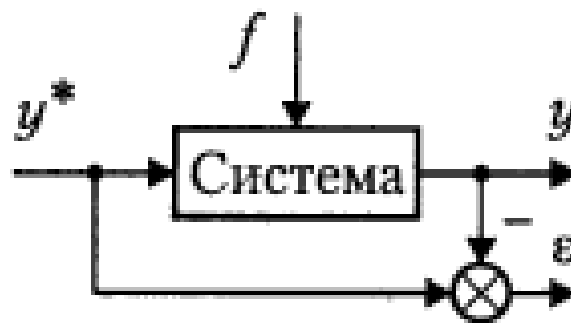


Рис. 11. Система управления, предназначенная для решения задачи слежения

Считается, что система обладает требуемым качеством, если ее показатели качества не превышают заданных значений, определенных назначением системы.

Рассмотрим поведение системы управления (Рис. 11), предназначенной для решения задачи слежения - соблюдения заданного закона изменения выходной переменной  $y(t)$ . Последнее выражается в виде целевого условия

$$y(t) \rightarrow y^*(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad \varepsilon(t) = y^*(t) - y(t) \quad (1)$$

где  $\varepsilon(t)$  - ошибка (рассогласование) системы. При ненулевых начальных рассогласованиях система должна с течением времени обеспечить с некоторой степенью точности совпадение входного (задающего)  $y^*(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов (устранение ошибки  $\varepsilon(t)$ ).

Мгновенное устранение возникающих рассогласований  $\varepsilon(t)$  в реальных системах невозможно в силу инерционности систем регулирования и ограничений, накладываемых на управляющие воздействия. Практически неосуществимо и абсолютно точное выполнение асимптотических условий (1) в силу действующих возмущений и дестабилизирующих факторов. Указанные соображения приводят к необходимости введения специальных показателей качества, характеризующих эффективность решения той или иной задачи управления.

Выходная переменная возмущенной системы определяется суммой свободных и вынужденных составляющих движения:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{в}(t)$$

где в силу устойчивости системы выполняются условия

$$y_{св}(t) \rightarrow 0, \quad y_{в}(t) \rightarrow y_y(t) \quad (2)$$

Условия (2) соответствуют переходному режиму системы, по окончании которого система «переходит» в установившийся режим  $y_y(t)$ .

В зависимости от свойств системы переходный режим может оказаться достаточно быстрым или медленным, монотонным или колебательным. Для оценки поведения системы в переходном режиме вводятся динамические показатели качества, т.е. численные оценки быстродействия и колебательности системы (время переходного процесса, затухание, перерегулирование и пр.).

Наиболее просто оценить качество переходного режима автономной системы, для которой вынужденная составляющая отсутствует. В установившемся режиме выходная переменная системы в идеальном случае должна быть идентична задающему воздействию, что соответствует нулевому значению установившейся ошибки.

Существует ряд универсальных приемов, позволяющих одновременно оценить динамические и/или точностные показатели системы, к которым относятся методика оценки качества по переходной функции, оценка по интегральным критериям и т.д.

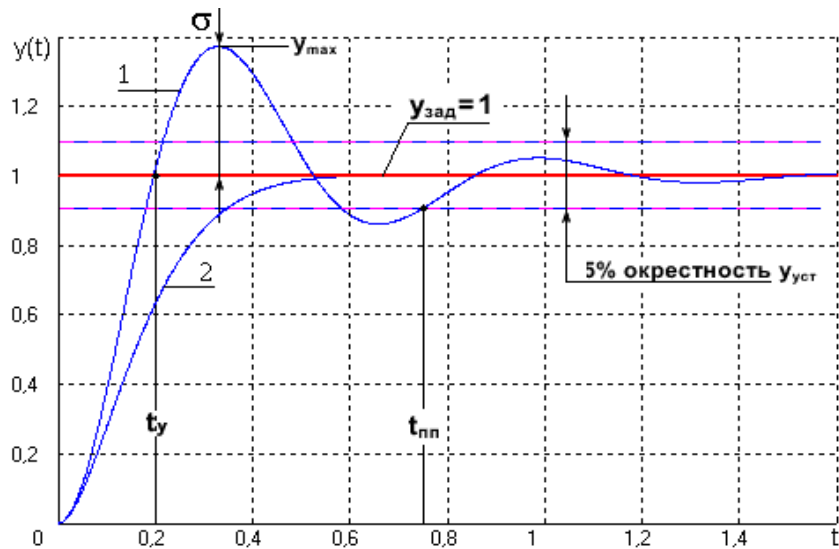


Рис. 12. Переходной процесс в следящей системе со ступенчатым задающим воздействием

### Показатели качества переходного процесса

Переходная функция системы оценивается с помощью совокупности характеристик, называемых показателями качества переходного процесса. Принято использовать следующие стандартные показатели качества переходного процесса, отражённые на типичном графике 1 переходного процесса в следящей системе со ступенчатым задающим воздействием (Рис. 12):

- $t_{пп}$  - время переходного процесса, по истечении которого отклонение управляемой величины  $y(t)$  относительно заданного значения  $y_{зад}$  по абсолютному значению становится (и остается в дальнейшем) меньше определенной заданной величины  $\epsilon_{уст}$ . Обычно принимается  $\epsilon_{уст} = \delta \epsilon y_{зад}$ ,  $\delta = 0,05$ . Время регулирования характеризует быстроту затухания переходного процесса.
- $t_y$  - время установления, промежуток времени, за который управляемая величина в первый раз достигает своего установившегося значения, характеризует скорость процесса управления.
- $\epsilon_{уст}$  - установившаяся ошибка (статическая точность,  $\epsilon_{уст} = e(\infty) = 1 - y_{уст}$ ). Если  $\epsilon_{уст} = 0$ , то система астатическая.
- $\sigma\%$  - относительное перерегулирование ( $\sigma = (y_{max} - y_{зад}) / y_{зад}$ ). Обычно требуют, чтобы значение  $\sigma$  было менее 18%. Перерегулирование характеризует колебательные свойства процессов. При нулевом значении  $\delta$  процесс носит монотонный характер (график 2 на Рис. 12), а при достаточно больших  $\delta$  приближается к незатухающему колебательному движению.
- $n$  - число колебаний за время переходного процесса ( $\leq 3$  шт.).

Как известно, чем дальше полюсы характеристического уравнения системы находятся от границы устойчивости (слева от мнимой оси комплексной плоскости), тем выше скорость протекания переходных процессов в системе. Для количественной оценки быстродействия систем используется также понятие степени устойчивости, которой называется положительное число, соответствующее расстоянию от мнимой оси до ближайшего к ней корня  $p_i$ :

$$\alpha = \min \operatorname{Re} p_i \quad i = [1, n]$$

В общем случае, этому условию соответствует пара комплексно сопряженных корней

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

с соответствующей наиболее медленной колебательной составляющей:

$$y_i(t) = A \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + \varphi)$$

Отсюда, по затуханию колебательного процесса  $\exp(-\alpha t)$  нетрудно определить время переходного процесса по заданной величине  $\delta$ :

$$t_{пп} \approx (1/\alpha) \ln(1/\delta).$$

Знак приближенности в данном случае отражает тот факт, что другие составляющие общего решения также могут внести определенную долю в значение  $t_{пп}$ , особенно, если вещественные части их полюсов близки по значениям к минимальному значению  $\alpha$ .

По переходной характеристике и значению установившейся ошибки (ошибки при  $t \gg t_{пп}$ ) можно оценить точность системы в режиме стабилизации - при постоянном входном или заданном воздействии  $y^*(t) = \text{const}$ .

Эти показатели связаны с запасами устойчивости по амплитуде и по фазе. Поэтому, обеспечение стандартных показателей качества обеспечивает необходимую устойчивость. Задачу обеспечения показателей можно рассмотреть как оптимизационную. Как правило, эта задача оказывается многокритериальной и достаточно трудной для решения, в том числе, численного.

При синтезе САУ в системе обычно выделяются неизменяемая часть и изменяемая часть, в которую можно вносить коррективы. Неизменяемая часть системы задает возможность получения гарантированного



качества. Классическим методом повышения качества системы является метод диаграмм В. В. Солодовникова. Практическая задача оптимизации обычно выполняется с использованием корректирующих устройств.

### Последовательное корректирующее устройство

Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы равна исходной, умноженной на передаточную функцию корректора. Корректирующее устройство включается последовательно в контуре системы в любом месте. Для исследования подходят ЛАЧХ, так как они складываются при последовательном соединении. ЛАЧХ и ЛФЧХ корректора находятся в виде разности желаемых и имеющихся частотных характеристик системы.

Типичным последовательным корректирующим устройством является ПИД-регулятор. Эти пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы выпускаются в широком ассортименте и в разнообразных реализациях, включая программную на контроллерах.

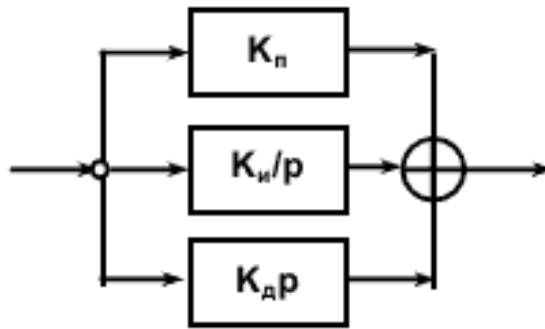


Рис. 13. ПИД-регулятор

ПИД-регулятор (Рис. 13) имеет три параллельных канала: усилитель с коэффициентом  $k_n$ , интегратор с коэффициентом  $k_i$ , дифференциатор с коэффициентом  $k_d$ . Усилитель позволяет изменить коэффициент усиления системы и уменьшить установившуюся ошибку:  $e_{уст} = 1/(1+k_n k)$ . Интегратор повышает порядок астатизма на 1. Увеличение  $k_d$  повышает запас устойчивости и сглаживает переходный процесс, поэтому дифференциальную составляющую называют демпфированием. С помощью интегральной и пропорциональной составляющих можно обеспечить первый порядок астатизма и желаемую статическую точность в ущерб запасу устойчивости, а дифференциальная составляющая повышает запас устойчивости.



Рис. 14. Параллельное корректирующее устройство

Параллельное корректирующее устройство имеет вид местной отрицательной ОС (Рис. 14). Для синтеза параллельных корректирующих устройств использовать логарифмические частотные характеристики менее удобно, чем для последовательных. Существует ряд инженерных методов расчёта параллельных корректоров (например, метод диаграмм Никольса). Можно просто вычислять корректирующую  $W_{кор}(p)$  по желаемой  $W_{зс}(p)$ .

$$W_{кор}(p) = (W(p) - W_{зс}(p)) / (W(p)W_{зс}(p))$$

Одна из двух передаточных функций  $W_{кор}(p)$  или  $W_{зс}(p)$  обычно не является физически реализуемой. Тем не менее, всегда можно выбрать достаточно близкую реализуемую функцию.

Метод Солодовникова позволяет построить корректирующее звено для имеющейся системы так, чтобы обеспечить требуемые типовые показатели качества и запас устойчивости по амплитуде и фазе. Метод основан на имеющейся связи между частотной характеристикой и переходной функцией:

$$H(t) = (2/\pi) \int_0^{\infty} (P(\omega)/\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

где  $P(\omega)$  - вещественная часть АФЧХ  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$

В. В. Солодовников доказал, что в любой системе имеются следующие зависимости между основными показателями качества переходного процесса и  $P(\omega)$ :

- $\sigma\% > 18\%$ , если есть «горб», т.е.  $P_{max} > P_0$ ;
- $\sigma\% < 18\%$ , если нет «горба»;
- $\sigma\% = 0$ , если производная  $dP/d\omega < 0$  и монотонно убывает. Требование монотонного убывания часто налагает неоправданные ограничения на конструкцию, достаточно обеспечивать  $\sigma\% < 18\%$ .

Диаграммы Солодовникова устанавливают связь между  $\sigma\%$ ,  $t_{пп}$ ,  $P_{max}$  и  $\omega_c$  - частотой среза системы, то есть той частотой, где усиление системы равно 1 или  $L(\omega_c)=0$ .

Область существенных частот ( $\omega_n$ ,  $\omega_b$ ) - это та часть частотной характеристики, которая в основном определяет качество системы. Диапазон ЛАЧХ для области существенных частот от +26 дБ. до -16 дБ. Уровень +26 дБ. соответствует усилению  $K=20$  и соответствующей установившейся ошибке  $e_{уст}=1/(1+K)\approx 0,05$ , т.е. нижняя частота области существенных частот определяется статической точностью  $e_{уст}\approx 0,05$  при ступенчатом входном воздействии. Левее частоты  $\omega_n$  ЛАЧХ не ниже +26 дБ., если не требуется астатизма, либо имеет наклон в зависимости от порядка астатизма. Уровень 16 дБ. соответствует малости влияния высокочастотных составляющих переходного процесса на уровне  $\approx 10\%$ . Наклон ЛАЧХ в области существенных частот должен быть -20 дБ./дек.

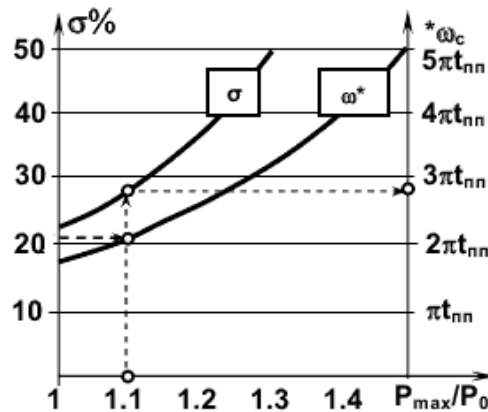


Рис. 15. Диаграммы Солодовникова

На диаграмме Солодовникова по горизонтали отложена второстепенная величина  $P_{max}/P_0$ , которая в настоящее время используется редко, а по вертикальным осям отложены  $\sigma\%$ ,  $t_{пп}$  и  $\omega_c$ .

Использовать диаграммы Солодовникова (Рис. 15) можно по-разному. Обычно применяется такая методика. Уточняют, какие показатели качества могут быть сформулированы заказчиком, и остальные параметры, необходимые для построения корректирующего устройства, определяют по диаграммам Солодовникова. По графикам можно, например, определить при заданном перерегулировании и времени переходного процесса частоту среза системы:  $(\sigma\%, t_{пп}) \rightarrow \omega_c$ ,  $n$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta\phi$ . Причём последние три параметра обеспечиваются автоматически. Тогда алгоритм синтеза САУ при исходно заданных  $\sigma\%$ ,  $t_{пп}$  может быть, например, таким:

- По диаграммам определяем  $\omega_c$  (выражение  $\omega_c$  через  $t_{пп}$ ).
- Строим область существенных частот, что даёт нам основную часть желаемой ЛАЧХ. Достаиваем высокочастотную часть произвольно и низкочастотную часть, исходя из требуемого порядка астатизма.
- Синтезируем последовательное корректирующее звено, обеспечивающее такую ЛАЧХ. Использование методики Солодовникова гарантирует показатели качества замкнутой системы и запасы устойчивости по амплитуде на уровне  $\Delta A\%=200$  (коэффициент усиления может быть увеличен в два раза) и по фазе на уровне  $\Delta\phi=35^\circ$ .

#### Программы анализа качества процессов управления

Современные инструментальные средства анализа и синтеза систем управления представлены множеством различных специализированных программных пакетов и комплексов, которые позволяют в диалоговом режиме выполнять операции над матрицами и полиномами, вычислять временные и частотные характеристики, строить корневые годографы, анализировать чувствительность и устойчивость, проверять управляемость и наблюдаемость системы, находить ее полюса и нули, сравнивать переходные процессы в системе по интегральным критериям и находить лучший, определять параметры и характеристики стохастических сигналов на входе и на выходе системы, составлять и преобразовывать математические модели исследуемой системы.

Эти программные средства обладают развитым сервисом, что позволяет строить и сравнивать графики нескольких процессов, изображать взаимные зависимости, фазовые кривые и портреты, строить характеристики и диаграммы, изображать и преобразовывать структурные модели системы, при этом графические построения могут быть выполнены в двух- и трехмерном представлении.

Известны фирменные и университетские программные пакеты анализа и синтеза систем управления: LSAP - США (Ливерморская национальная лаборатория); TUTSIM - США (Стэндфордский университет); CLADP - Великобритания (Кембридж); KEDDC - Германия (Рурский университет); MATRIX - фирмы *Integrated Systems Inc.*; SIMULINK в среде MATLAB известной фирмы *Math Works Inc.*; MARS - Украина (Институт кибернетики). Среди отечественных инструментальных программных средств известны разработки Академии авиационного и космического приборостроения, Санкт-Петербург; Московского инженерно-физического института; Московского государственного технического университета; Института проблем управления РАН, Москва.

Программные комплексы TUTSIM, MATRIX, SIMULINK позволяют исследовать модели любых динамических систем, которые испытывают любые внешние воздействия. Комплексы обеспечивают команды изменения структуры модели, ее параметров, выходных блоков и диапазонов рассчитываемых данных; команды одиночного и многократного запуска, останова и продолжения процесса моделирования с выводом графиков и числовых данных на экран, принтер или в файл; команды графического сервиса, позволяющие изображать оси, сетку, маркировку, комментарии к графикам, строить фазовые кривые или взаимозависимости и прочее. Комплексы располагают различными функциональными блоками для моделирования любых непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных динамических систем, испытывающих детерминированные и стохастические воздействия.

### Случайные процессы в системах

В реальных системах имеются помехи (возмущения), действующие в каналах передачи информации. Часто не имеется никакой, кроме статистической, информации об этих факторах, что заставляет считать эти параметры случайными величинами с заранее неизвестными законами распределения. Так возникает задача управления в условиях неопределенности. Здесь имеются два аспекта: управление в условиях неопределенности и задача борьбы с помехами.

Модели случайных сигналов. Случайные процессы и отображающие их сигналы будем считать функциями времени, принимающими случайные значения. В каждый момент времени, значение случайного процесса есть случайная величина  $x(t)$ . Основной характеристикой случайной величины в момент времени  $t$  является функция  $p(x,t)$  - плотность вероятности в момент  $t$ . Плотность вероятности определяет функции математического ожидания и дисперсии случайных величин:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(x,t)dx, D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)-M_x(t))^2 p(x,t)dx$$

Для описания статистической взаимосвязи значений  $x(t)$  в разные моменты времени вводятся корреляционная функция сигнала  $x(t)$ :

$$K_x(t_1, t_2) = M[(x(t_1) - M_x(t_1))(x(t_2) - M_x(t_2))]$$

и взаимная корреляционная функция сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M[(x(t_1) - M_x(t_1))(y(t_2) - M_y(t_2))]$$

Отметим, что  $K_x(t, t) = D_x(t)$ , т.е. при  $t_1 = t_2 = t$  это есть дисперсия в момент времени  $t$ .

Стационарным случайным процессом называется такой случайный процесс, для которого корреляционная функция зависит не от абсолютных значений  $t_1$  и  $t_2$ , а только от их разности  $K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2) = K(\tau)$ . Дисперсия и математическое ожидание для стационарного случайного процесса являются константами. Стационарный случайный процесс для САУ не меняет своих статистических характеристик за время жизни системы.

Спектральная плотность  $S(\omega)$  стационарного случайного процесса есть преобразование Фурье от корреляционной функции  $K(\tau)$ . Соответственно, корреляционная функция  $K(\tau)$  есть обратное преобразование Фурье спектральной плотности  $S(\omega)$ :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, K(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega$$

Спектральная плотность случайного процесса описывает разложение мощности процесса по гармоническим составляющим. Можно выразить дисперсию через интеграл от спектральной плотности. Это означает, что дисперсия есть суммарная мощность случайного процесса, распределенная по частоте:

$$D = K(0) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

### Фильтрация помех

Будем считать, что в САУ помехи могут быть в двух основных местах: помеха в канале управления (к управлению добавляется помеха  $W$ ) и помеха в канале измерения (выходной сигнал измеряется с помехой  $V$ ). Наиболее общая задача фильтрации шума - максимально возможное подавление обеих помех.

Если рассмотреть шумовой сигнал с бесконечным равномерным спектром, то ему будет соответствовать корреляционная функция в виде  $\sigma$ -функции:

$$S(\omega) = \sigma^2 = \text{const}; K(\tau) = (\sigma^2/2\pi) \delta(\tau); D = K(0) = \infty$$

Эти три уравнения описывают «белый шум» с интенсивностью  $\sigma^2$ . Ясно, что такой сигнал не может быть физически реализован в силу бесконечной мощности. Можно, однако, реализовать сколь угодно близкий к этому случайный процесс, называемый «розовым шумом». Формально розовый шум получается при пропускании белого шума через любое реальное звено. При этом ограничивается спектр сигнала, так как никакое реальное звено не может пропускать бесконечную полосу частот. В результате, у реального розового шума может быть сколь угодно широкий, но убывающий спектр, а его корреляционная функция может очень быстро убывать, что означает малую связь значений процесса в разные моменты времени.

Задачу фильтрации помех будем решать как оптимальную, то есть искать условия наибольшего подавления помех. Помехи будем считать случайными процессами с известными корреляционными функциями (спектральными характеристиками). Алгоритмы управления и фильтрации могут быть реализованы по отдельности, и их одновременное функционирование в замкнутой системе не мешает друг другу. Другими словами, оптимальный фильтр можно рассчитывать отдельно от регулятора в том смысле, что

характеристическое уравнение замкнутой системы оказывается равным произведению уравнений подсистемы регулирования и подсистемы фильтрации.

При анализе и синтезе фильтров используется аддитивная модель входного сигнала:  $u(t)=s(t)+q(t)$ , где  $s(t)$  - полезная составляющая сигнала управления,  $q(t)$  - составляющая шумов и помех. Синтез оптимальных фильтров производится с максимальным использованием известной априорной информации как о сигналах, которые необходимо выделять, так и о шумах и помехах. Как правило, используется информация о природе полезного сигнала и шума, об их спектральном составе, о корреляционных и взаимных корреляционных характеристиках. Наличие определенных особенностей (различий) в характеристиках сигнала и шума позволяет реализовать фильтр вообще и оптимальный фильтр в частности. Если такие особенности отсутствуют, постановка задачи становится некорректной.

При наличии помех абсолютно точное выделение полезного сигнала методами линейной фильтрации, как правило, невозможно. Результат фильтрации

$$z(t)=h(\tau)\otimes u(t-\tau) \quad (3)$$

отличается от  $s(t)$  на величины  $s(t)=z(t)-s(t)$ , которые являются абсолютными значениями погрешности воспроизведения полезного сигнала по координатам  $t$ . Качество фильтра оценивается средним значением квадрата величины  $\varepsilon(t)$ :

$$\varepsilon^2 = [z(t) - s(t)]^2 \quad (4)$$

Выражение (4) дает возможность определить функцию  $h(t)$  фильтра по критерию минимума среднего квадратического отклонения выходного сигнала от его действительной или заданной формы.

Фильтр Винера является оптимальным фильтром формирования из входного сигнала  $u(t)$  выходного сигнала  $z(t)$  при известной форме полезного сигнала  $s(t)$ , который содержится во входном сигнале в сумме с шумами. В качестве критерия его оптимизации используется среднее квадратическое отклонение сигнала  $z(t)$  на выходе фильтра от заданной формы сигнала  $s(t)$ . Подставим уравнение свертки (3) в раскрытой форме интегральной свертки в выражение (4) и получим отклонение  $\varepsilon^2$  выходного сигнала  $z(t)$  от заданной формы выходного сигнала  $s(t)$ :

$$\varepsilon^2 = [\int u(t-\tau)h(\tau)dt - s(t)]^2 \quad (5)$$

Минимум выражения (5) определяет функцию импульсного отклика  $h(t)$  оптимального фильтра. При этом для оптимального фильтра действительно выражение:

$$h(t)\otimes K_{zu}(\tau)=K_{zu}(\tau) \quad (6)$$

Другими словами, свертка функции отклика оптимального фильтра с функцией автокорреляции входного сигнала должна быть равна функции взаимной корреляции выходного и входного сигналов.

Отметим, что  $K_{zu}(\tau)=R_u(\tau)+R_q(\tau)$ , где  $R_u$  - функция автокорреляции сигнала,  $R_q$  - функция автокорреляции шума, а  $K_{zu}(\tau)=B_{zs}(\tau)+B_{zq}(\tau)$ , где  $B_{zs}$  - функция взаимной корреляции сигналов  $z(t)$  и  $s(t)$ ,  $B_{zq}$  - функция взаимной корреляции сигнала  $z(t)$  и помех  $q(t)$ . Подставляя данные выражения в (6), получаем:

$$h(n)\otimes [R_u(\tau)+R_q(\tau)]=B_{zs}(\tau)+B_{zq}(\tau) \quad (7)$$

Частотная характеристика фильтра находится преобразованием Фурье левой и правой части уравнения (7):

$$H(\omega)[W_u(\omega)+W_q(\omega)]=W_{zs}(\omega)+W_{zq}(\omega), H(\omega)=[W_{zs}(\omega)+W_{zq}(\omega)]/[W_s(\omega)+W_q(\omega)] \quad (8)$$

где  $W_s(\omega)\Leftrightarrow R_s(\tau)$  и  $W_q(\omega)\Leftrightarrow R_q(\tau)$  - энергетические спектры (плотности мощности) сигнала и помех,  $W_{zs}(\omega)\Leftrightarrow B_{zs}(\tau)$  - взаимный энергетический спектр входного и выходного сигналов,  $W_{zq}(\omega)\Leftrightarrow B_{zq}(\tau)$  - взаимный энергетический спектр выходного сигнала и помех.

Обычно имеет место статистическая независимость полезного сигнала, а, следовательно, и сигнала  $z(t)$ , от шумов, при этом  $B_{zq}=0$  и фильтр называют оптимальным по сглаживанию шумов при заданной форме выходного сигнала:

$$H(\omega)=W_{zs}(\omega)/[W_s(\omega)+W_q(\omega)] \quad (9)$$

Фильтр (9) оптимален в том смысле, что максимизирует отношение мощности сигнала к мощности шума по всему интервалу сигнала, но не в каждой индивидуальной точке.

Выражения (8-9) достаточно наглядно демонстрируют физический смысл формирования передаточной функции фильтра. При воспроизведении сигнала частотная функция взаимной корреляции входного сигнала с выходным  $W_{zs}$  (плотность взаимной мощности) повторяет частотную функцию автокорреляции  $W_s$  (плотность мощности сигнала). Плотность мощности статистических шумов  $W_q$  распределена по частотному диапазону равномерно, в отличие от плотности мощности сигнала  $W_s$ , которая, в зависимости от формы сигнала, может занимать любые частотные интервалы спектрального диапазона. На частотах, где сосредоточена основная энергия сигнала, имеет место  $W_s(\omega)\gg W_q(\omega)$  и  $H(\omega)\Rightarrow 1$  (как минимум, больше 0,5). Там, где значение  $W_s(\omega)$  становится меньше  $W_q$ , коэффициент передачи фильтра становится меньше 0,5, и в пределе  $H(\omega)=0$  на всех частотах, где полностью отсутствуют частотные составляющие сигнала.

Таким образом, оптимальные фильтры учитывают особенности спектрального состава сигналов и способны формировать передаточные функции выделения полезных частот сигналов из любых диапазонов спектра с максимальным подавлением шумов на всех частотах спектрального диапазона, не содержащих полезных сигналов, при этом границы усиления-подавления устанавливаются автоматически по заданному уровню шумов.

## Список литературы

1. Душин С. Е. и др. Теория автоматического управления / под ред. В. Б. Яковлева. М.: Высшая школа, 2003. 567 с.
2. Ильюшин Ю. В. Стабилизация температурного поля туннельных печей конвейерного типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2011. № 3 (126). С. 67-72.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

УДК 519.6

Нина Ивановна Костюкова, Борис Григорьевич Михайленко  
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

АСПЕКТЫ ТЕКТОНИКИ<sup>©</sup>

Схема протекания процессов на границе внутреннего и внешнего ядра, взятая за основу в нашей модели, объясняет периодическое появление давления, направленного против *сил гравитационного сжатия* планеты: когда оно больше этих сил, происходит расширение *Земли*, когда меньше - сжатие.

Период *расширения Земли* - это период проявления ее *тектонической активности*. Именно в течение этого времени происходит разрастание океанического дна, раздвижение континентов, образование поднятий и гор. В течение этого периода, по нашей модели, *МПЗ* имеет полярность, обратную современной. Сжатие *Земли*, следующее за расширением, приводит к появлению *геосинклиналей*, образованию складок, надвигов и тому подобное. Полярность *МПЗ* - современная.

Замечено, если *МПЗ* той или иной полярности стабильно и не меняется в течение длительного периода (несколько миллионов лет), то стабильны и *тектонические* процессы на *Земле*. Если же *МПЗ* меняется сравнительно часто, то именно тогда на *Земле* происходят процессы, связанные с максимальной *тектоно-магматической активностью* [1].

Обозначим время *прямой полярности МПЗ* -  $t_1$ , *обратной* -  $t_2$ , тогда: если  $t_1, t_2$  велики ( $>10^6$  лет), то *Земля* развивается относительно спокойно, если  $t_1$  и  $t_2$  малы ( $<10^6$  лет) - на *Земле* наступают *тектонически активные* периоды, причем чем меньше  $t_1$  и  $t_2$ , тем активнее *Земля*.

В этой связи, прежде чем рассматривать особенности *тектоники* в модели *расширяющейся Земли*, необходимо оценить, как будет выглядеть этот экспериментальный факт в рамках нашей модели.

**Пульсирующий характер расширения Земли**

Процесс конденсации вещества приводит к выделению тепла на холодной стенке. Она нагревается, что ведет к уменьшению интенсивности конденсации или к ее прекращению. Стенка за счет теплопроводности материала остывает, вновь создавая условия для начала конденсации. Таким образом, возможен *пульсирующий характер конденсации* или, применительно к нашей модели, *пульсирующий характер расширения Земли*.

Аналогично тому, как в электротехнике характерное время процесса *релаксации схемы* определяется произведением электрического сопротивления на емкость, в нашем случае время процесса охлаждения «стенки» за счет *теплоотвода*  $t_1$  будет определяться отношением *теплоемкости* вещества  $C_p$  к его *теплопроводности*  $\lambda$ :  $t_1 = \frac{C_p * \rho * \delta^2}{\lambda}$ , где  $\rho$  - изменение плотности вещества в *F-слое* относительно *G-ядра*

( $\rho \approx 10 \text{ г/см}^3$ ),  $\delta$  - характерный размер толщины «стенки» (эта формула получена при решении *уравнения теплопроводности Фурье*).

Заметим, что никакой «стенки» в нашей модели нет и быть не может, эта аналогия приведена лишь затем, чтобы показать, что процесс *конденсации* вещества *G-ядра* может происходить с *флюктуацией* его интенсивности во времени. Поэтому «стенка» - не более чем некоторый характерный размер - толщина слоя, в объеме которого реализуется фазовый переход - *конденсация*. Поскольку толщина *F-слоя* ( $\Delta R$ ) равна приблизительно 100 км, то величина  $\delta$  должна быть меньше  $\Delta R$ , но примерно того же порядка (примем  $\delta \approx 10 \text{ км} = 10^6 \text{ см}$ ).

Определим величину  $t_1$ . По *палеомагнитным данным* для современной *магнитной эпохи Брюнеса*, характеризуемой в целом *прямой* (современной) *полярностью МПЗ*, это время порядка 100 тысяч лет ( $\approx 3 * 10^{12} \text{ с}$ ). В нашей модели это и есть период, в течение которого *Земля* не расширяется (охлаждается «стенка»), то есть величина примерно того же порядка.