

Костюкова Нина Ивановна, Михайленко Борис Григорьевич

**МОДЕЛЬ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО РАСШИРЕНИЯ ЗЕМЛИ: ВАЖНОСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2012/1/11.html](http://www.gramota.net/materials/1/2012/1/11.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2012. № 1 (56). С. 41-45. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2012/1/](http://www.gramota.net/materials/1/2012/1/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

Докажем это утверждение. Примем, что  $h_2 = h_1 + A + B$ , где  $A$  - высота *поднятий*, а  $B$  - глубина их «*корней*». Радиус  $R_2$  стал меньше, чем  $R_1$ , причём  $R_1 = R_2 + B$ .

Рассмотрим два *куска*, имеющих равные площади  $S$  в основании. Высота конуса состоит из  $R_1 + h_1$  в первом случае и  $R_2 + h_2$  - во втором. Для сохранения момента *инерции* вращающейся *Земли* необходимо выполнение условия:  $m_1 R_1^2 = m_2 R_2^2$ . В нашем случае можно записать:  $[B * \rho_3 + m * \rho_0] * R_2^2 = h_2 * \rho_0 * R_2^2$ , полагая что  $m = S * h * \rho$ . Отсюда получаем:  $A/B = \frac{\rho_3 - \rho_0}{\rho_0}$ , так как  $\rho_3 \approx 2\rho_0$ , то  $A/B \approx 1$ , то есть высота *поднятий* примерно равна глубине их «*корней*».

По поводу полученной зависимости сделаем два замечания.

В океане  $\rho_0$  (с учетом толщины слоя воды) несколько ниже, чем на материках. Это обстоятельство должно приводить к относительному увеличению высоты *гор (поднятий)* в океане и уменьшению глубины их *корней*.

При расширении *Земли* масса ее не изменяется, а объем растет, значит, величина  $\rho_3$  падает. Следовательно, относительная высота *древних поднятий* должна быть больше.

Таким образом, выполнение условия сохранения момента при образовании *поднятий* ведет к выравниванию масс ( $m_1 = m_2$ : *условие изостазии*) за счет опускания границы фазового перехода между оболочкой с плотностью  $\rho_0$  и *Землей* ( $\rho_3$ ). Разделив в этом равенстве каждую часть на  $R_2^2$  и умножив на  $G$  - *гравитационную постоянную*, получаем условие равенства ускорения силы тяжести:  $G \frac{m_1}{R_2^2} = G \frac{m_2}{R_2^2}$ . Выполнение

правила сохранения момента при образовании *гор* автоматически приводит к *изостазии* и равенству ускорения силы тяжести.

Итак, расширение *Земли* порождается *конденсацией* вещества внутреннего ядра. Механизм *конденсации* имеет пульсирующий характер и находит свое отражение в периодическом характере *тектонической активности*.

Каков же запас энергии на *Земле*? Масса вещества  $G$ -ядра оценивается как  $\approx 3 * 10^{26}$  г, что соответствует примерно  $4 * 10^{30}$  Дж. Если считать, что вся масса *Земли*  $6 * 10^{27}$  г. в момент ее образования находилась в том же состоянии, что и вещество в  $G$ -ядре, то за пять миллиардов лет своего существования в обычное (*конденсированное*) состояние перешло 19/20 ее массы. Если же скорость *конденсации* считать равной средней, то вещество  $G$ -ядра перейдет в *конденсированное* состояние примерно за 250 млн лет. Но если расширение *Земли* происходит примерно по экспоненциальному закону и скорость *конденсации* примерно в 15-20 раз выше, этот срок соответственно сократится.

#### Список литературы

1. Белоусов В. В. Основы геотектоники. М.: Наука, 1966.
2. Геофизика океана / под ред. О. Г. Сорохитина. М.: Наука, 1979. Т. 2.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
4. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкости. Л.: Наука, 1975.

УДК 519.6

Нина Ивановна Костюкова, Борис Григорьевич Михайленко  
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

#### МОДЕЛЬ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО РАСШИРЕНИЯ ЗЕМЛИ: ВАЖНОСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТОВ<sup>©</sup>

В настоящее время известны результаты ряда экспериментов, которые можно считать чрезвычайно важными для проверки нашей модели. Но для этой цели необходимы новые эксперименты (как натуральные, так и численные), с тем чтобы выяснить принципиальные моменты планетарной астрофизики, физики *Земли*, геодинамики и магнитного поля *Земли*.

Первый вопрос из области астрофизики, который необходимо решить для проверки модели, состоит в выяснении механизма образования планет и их спутников. Подходов к его решению может быть несколько.

Первый подход - разработка образования звезды (планеты) и, как следствие его, образование планет (спутников) на основе законов и правил механики сплошной среды (это, по-видимому, единственно правильный путь). Заметим, что аналитически задача определения динамики гравитационного сжатия газового

шара с образованием звезды и планет, вращающихся вокруг звезды по правилу Бодде, еще ждет своего решения. Оно позволит со значительно большей ясностью, чем в настоящее время, ответить на основные вопросы, связанные с внутренним устройством планет.

Другой подход - экспериментальное наблюдение планет и планетных систем других звезд. Причем, поскольку известно, что возраст звезд различен, и они находятся на различных этапах своей эволюции, наибольший интерес представляло бы наблюдение планетных систем именно в таком аспекте. Однако осуществить это технически весьма трудно. Очевидно, что увидеть в *оптический телескоп* планету, даже самой ближайшей звезды, нельзя. Поэтому в *оптической астрономии* о наличии у звезды планеты можно судить, лишь наблюдая незначительные смещения в ее положении, которые будут происходить, если около звезды обращается планета. Так, например, подсчитано, что астроном с какой-нибудь звезды должен наблюдать регулярные смещения *Солнца* каждые 5,9 лет (полупериод обращения *Юпитера*) на величину примерно 1,5 млн км. К настоящему времени у 11 звезд обнаружены смещения, позволяющие думать, что около них обращаются планеты. Наибольший интерес представляет звезда *Барнарда*, вокруг которой вращаются, по мнению Ван де Кампа, две планеты с массами 0,4 и 0,8 массы *Юпитера*.

### Астрофизика

Американские астрономы *Абт и Леви*, анализируя спектры звезд, наблюдаемых на северном небе невооруженным глазом, пришли к выводу, что примерно треть звезд солнечного типа являются одиночными (а не двойными) звездами, причем большинство из них (возможно, что и все) имеют планетные системы. Таким образом, солнечная система оказывается далеко не уникальной.

Наибольший интерес представляет обнаружение *протопланетных* систем у молодых звезд. На результатах изучения звезд типа *T - Тельца* мы заметим, что время образования планетных систем у звезд типа *T - Тельца* не должно превышать  $10^5$  лет, что в значительно большей степени соответствует нашим оценкам, чем, например, оценкам времени образования планет путем *аккреции из планетезималей* [3].

Благодаря успехам *сверхдальной радиointерферометрии* стало возможным проследить процессы формирования *протопланетных* колец - прообразов будущих планет. В частности, обнаружена кольцевая структура в объекте *Орион-А* [2], где радиус кольца равен 6 а.е. Кольцо состоит из нескольких более тонких *протопланетных* колец, поперечное сечение которых не превышает 0,2 а.е. Их масса примерно равна массе *Земли*. Кольца движутся со скоростью 8,5 км/с вокруг звезды, масса которой равна массе *Солнца*.

Продолжение исследований планетных систем, находящихся на различной степени эволюции, позволит однозначно решить вопрос о механизме их образования. Проведение подобных исследований необходимо и в связи с разработкой и осуществлением в ближайшем будущем проектов по реализации глобальных фазостойбильных радиointерферометрических систем [4].

### Физика ядра Земли

Согласно нашей модели, вещество внутреннего ядра Земли находится в *высокоплотном, высокотемпературном, газообразном состоянии* и переходит в *конденсированное* в течение характерного для каждой планеты времени *эволюции*. Этот переход реализуется в *F-слое*, который, по данным *сейсмологии*, имеет особенность, состоящую в понижении («провале») в этом слое скорости распространения *продольных сейсмических волн* [1]. Подобный «провал» в *скорости сейсмических волн* может характеризовать *двухфазную среду*, что согласуется с нашей моделью.

Основные моменты, подлежащие экспериментальной проверке модели, в частности, физики ядра *Земли* - это определение (оценка) плотности внутреннего *G-ядра* и уточнение характерных величин скоростей волн в *F-слое* (так как в ряде монографий поведение скоростей в этом слое изображается без характерного «провала»).

Единственный способ получения информации о физических характеристиках внутренних слоев *Земли* - это *зондирование* («просвечивание») ее *сейсмическими волнами*. Как правило, в качестве источника таких волн используется *сейсмическая энергия землетрясений*, либо *геофизических взрывов*. При этом зачастую последний разрез *Земли* восстанавливается по времени прихода сигнала на *сейсмореприемники*, расположенные в различных географических точках *Земли*. Значительная часть информации (*спектральная, фазовая, дисперсионная* и прочая) теряется. Подобная ситуация в сейсмологии существовала до появления идеи и разработки методов *ВПЗ - вибрационного просвечивания Земли*. Этот метод интенсивно развивается, но используется пока для изучения *коры* и *верхней мантии Земли*. С успешной разработкой мощных вибраторов и систем регистрации очень слабых сейсмических сигналов (с накоплением, *корреляцией, синхронным детектированием* и тому подобное) можно рассчитывать на постановку и проведение натурального эксперимента по зондированию ядра *Земли* методами *ВПЗ*. Такой эксперимент мог бы позволить оценить два наиболее существенных для нашей модели момента - плотность *G-ядра* и поведение *скоростей сейсмических волн* в *G-ядре, F-слое и внешнем ядре (E-слое)*.

Очевидно, что проведению такого эксперимента должны предшествовать расчеты (на ЭВМ) распределения скоростей от источника, уровней сигналов на приемниках, пространственное распределение приемников (по профилю или по площади) и тому подобное. Уточнение экспериментальных данных по *плотности G-ядра* и *величинам скоростей сейсмических волн*, а также построение более точной модели физических процессов, происходящих в *ядре Земли*, позволит оценить ряд *термодинамических* характеристик его вещества.

### Магнитное поле

В нашей модели **дипольная компонента МПЗ** генерируется путем суточного вращения двойного электрического слоя, образуемого в *F-слое ядра* (например, за счет **термической ионизации и термодиффузионного разделения зарядов**). Появление **мультипольных компонент МПЗ** вызвано неравномерным распределением плотности этих зарядов по *F-слою* (выраженным, например, в виде «**бугров**» и «**впадин**» на поверхности *G-ядра*). В этом случае должна наблюдаться **корреляция** между глобальными **аномалиями: гравитационными, магнитными и тепловыми**.

Величина **МПЗ** зависит (в нашей модели) от частоты суточного вращения планеты -  $\varpi$ , ширины *F-слоя*  $\Delta R^2$  и плотности зарядов двойного электрического слоя  $n_e$ . Обнаружена **корреляция** между **вековым изменением величины дипольной компоненты МПЗ** и частотой  $\varpi$ : увеличению частоты  $\varpi$  соответствует увеличение амплитуды поля. Однако, если за год (в среднем) отношении  $\frac{\Delta\varpi}{\varpi} \approx (10^{-9} - 10^{-8})$ , то  $\frac{\Delta H}{H} \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ , то есть наблюдается явное несоответствие величин. Попробуем объяснить это несоответствие.

Считается общепринятым способ определения **дипольной компоненты МПЗ** как первого члена разложения полного поля в ряд Гаусса, причем, как известно, **дипольная компонента** оказывается наклоненной к оси вращения на  $11,5^\circ$ . Но согласно нашей модели **дипольная компонента МПЗ** должна быть параллельна оси вращения планеты, а угол  $11,5^\circ$  обеспечивается влиянием **мультипольной компоненты - аномалии**. Если принять эту точку зрения, то отношение  $\frac{\Delta H}{H}$  будет в значительно большей степени, чем  $\frac{\Delta\varpi}{\varpi}$  определяться величиной **векового хода аномалии**, который по величине как раз такого порядка ( $\Delta H = 5 - 50 \gamma / \text{год}$ ,  $H \approx 5 * 10^4 \gamma$ ).

По-видимому, для вариации величины  $H(\frac{\Delta H}{H})$  изменение  $\frac{\Delta\varpi}{\varpi}$  слишком незначительно, возможно и величина  $\Delta R^2$  также мало изменяется с течением времени. Параметр, который меняет свою величину и даже знак - это  $n_e$  (действительно,  $n_e = 0$  - **инверсия МПЗ**), и именно вариация концентрации зарядов двойного слоя и определяет  $\frac{\Delta H}{H}$ . Величина  $n_e$  определяется процессами **тепло-массопереноса**, происходящими в *F-слое*, которые, в свою очередь, являются следствием «**конденсации**» вещества *G-ядра*. Аналогичным образом следствием этих процессов являются изменение частоты вращения **Земли**, изменение ее радиуса и, как будет показано ниже, **вариации амплитуды процессии и нутации Земли**, а также изменение ее сейсмической активности.

Одним из основных моментов в модели **МПЗ**, как мы отмечали, является объяснение дрейфа его полюса. По нашей модели, смещение магнитного полюса вызывается влиянием магнитных аномалий («**фокусов**»), а его **дрейф** - изменением значений поля в окрестности этих аномалий («**фокусов**»). Модель может быть экспериментально проверена (с этой целью представляется целесообразным установить ряд **геомагнитных станций по магнитному меридиану: Восточно-Сибирская аномалия (ВСА) - Северный магнитный полюс - Канадская аномалия (КА)**). Эксперимент будет заключаться в регистрации на этих станциях компонент магнитного поля и сравнении их значений с изменением координат магнитного полюса.

В Канаде имеются три таких станции, почти точно расположенные на магнитном меридиане: это станции Черчилль, Бейкер-Лейк, Резольют-Бей. В нашей стране ближе всего к этому меридиану расположена станция на мысе Челюскин. Для реализации предлагаемого эксперимента потребовалось бы установить по крайней мере две станции: одну непосредственно в районе **ВСА**, другую несколько севернее, между **ВСА** и мысом Челюскин.

Из нашей модели следует, что должна наблюдаться корреляция между знаком гравитационной аномалии и аномалии **МПЗ**, а также корреляция (по величине и знаку) между  $\frac{\Delta H}{H}$ ,  $\frac{\Delta g}{g}$ ,  $\frac{\Delta Q}{Q}$ . В предлагаемом эксперименте возможна проверка такой корреляции, для чего потребуются с необходимой точностью в точках аномалий (либо «главных фокусов») регистрировать компоненты магнитного поля, величину ускорения силы тяжести, величину теплового потока.

### Геодинамика

Как мы показали, «**горячая**» модель образования планеты описывает состояние ее вещества и последующую эволюцию, в течение которой вещество из высокоплотного, нагретого, газообразного состояния переходит в нормальное, конденсированное, вызывая при этом увеличение объема планеты - расширение. Материки при этом раздвигаются, пространство между ними заполняется веществом, прошедшим магматическое состояние, образуются океаны на **Земле**, «**морья**» - на **Луне**, «**каналы**» - на **Марсе** и тому подобное. Это модель. Одним из возможных доказательств ее было бы следующее.

Выполним следующую операцию - определим площадь дна океанов самого «молодого» возраста (например, последних 10-20 миллион лет) и «уберем» ее с карты (глобуса). «Сдвинем» материки, заполнив «освободившееся» пространство и вычислим текущий радиус планеты. Повторим эту процедуру последовательно для все более древнего возраста планеты. В конечном счете, мы должны «собрать» материки на сфере радиусом, равным радиусу внешнего ядра, так как площадь материков практически равна площади внешнего ядра **Земли**.

Естественно, при выполнении этой операции может оказаться, что придется несколько деформировать (растягивать или сжимать) материи, возможно, несколько повернуть их вокруг своей оси. При этом должны выявиться точки приложения растягивающих (сжимающих) сил, которые, в принципе, должны совпасть с местоположением глобальных *гравитационных аномалий*. Одним из доказательств факта расширения *Земли* может быть решение нашей задачи, при котором «*корни*» материков не пересекаются.

Успехи, достигнутые в последние десятилетия в изучении геологии дна океанов и в частности обнаружение явления разрастания дна океанов (*спрединга*), стимулировали появление и «расцвет» *плитной тектоники*. Однако из модели разрастания дна океанов вытекают два альтернативных следствия: во-первых, необходимо, чтобы плиты ныряли одна под другую, если радиус планеты остается неизменным либо, во-вторых, необходимо, чтобы увеличивался радиус *Земли*, и она расширялась. С целью проверки характера и скорости движения плит, их кинематики разрабатываются и уже начали осуществляться проекты, включающие *лазерные и радиоинтерферометрические системы*.

*Лазерные* системы, расположенные на различных континентах, состоят из излучателей и приемников. *Лазерный луч* направляется на *Луну* или специально выведенные на орбиту для реализации этого эксперимента искусственные спутники, отражается от уголкового отражателя, установленных на *Луне* американскими экспедициями «*Аполлон*» и принимается наземными станциями. Точность измерения расстояния между станциями (то есть между континентами) не превышает 5 см.

Другой проект заключается в создании системы *радиотелескопов*, образующих *длиннобазовый интерферометр*. Телескопы одновременно принимают сигналы одного и того же *квара* (или другого удаленного *радиоисточника*). Точность измерения расстояния между приемниками обеспечивается на уровне около 3 см.

Совместное использование этих двух систем позволит повысить точность измерения расстояния между станциями настолько, что можно будет обеспечить нижний предел измерения относительной скорости движения плит порядка 1 см/год.

В нашей стране разрабатывается проект создания глобальных *фазостабильных радиоинтерферометрических систем*, предназначенных для решения задач *астрофизики, космологии и геофизики*. В частности, предполагается с помощью такой системы провести измерения скорости вращения *Земли* с точностью, заметно превышающей современную, изучить свободные и вынужденные движения полюса *Земли*, измерить расстояние между пунктами, разнесенными на тысячи км (вплоть до  $2 R_{\oplus}$ ) друг от друга, с точностью до 1 см. Реализация этих проектов позволит определить относительные скорости движения плит.

Рассмотрим, какие же результаты могут быть получены при осуществлении этих проектов, если наша модель *пульсирующего расширения* верна. Но прежде остановимся на ее полюсе и *суммарной энергии землетрясений*. Замедление вращения *Земли* хорошо коррелирует с возрастанием амплитуды колебаний положения географического полюса и увеличением энергии землетрясений, то есть ростом *сейсмической активности Земли* (коэффициент корреляции 0,78 для усреднения по 5 годам и 0,9 - по 20) .

Как мы отмечали, в настоящее время *Земля* «переживает» спокойный период - глобального расширения не происходит. Согласно нашей модели, некоторое незначительное усиление либо ослабление процессов *конденсации*, следовательно, как расширение, так и сжатие *Земли*, может происходить и в настоящее время. Если встать на эту позицию, то при увеличении интенсивности процессов *конденсации* радиус *Земли* увеличивается, скорость вращения убывает (в силу равенства момента), увеличивается амплитуда раскачивающих *Землю* колебаний, возрастает сейсмичность (по нашей модели), и должна наблюдаться *корреляция* значений величин.

Отмечается *корреляция* между скоростью вращения *Земли* и вековыми вариациями величины *МПЗ*.

Анализируя полученные экспериментальные результаты и считая, что все замеченные особенности порождены одной причиной - *изменением радиуса Земли*, оценим (в нашей модели) порядок некоторых величин. Согласно эксперименту, максимальное значение  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-9}$  1/год, соответственно и  $\frac{\Delta r}{r}$  должно быть того же порядка. Тогда *радиальная скорость* расширения  $V_r = 1$  см/год, а скорость увеличения периметра *Земли* (скорость движения плит)  $V_p \approx 2\pi V_r \approx 6$  см/год. Из анализа многолетних наблюдений можно заключить, что  $\omega$  колеблется около некоторого среднего значения. Таким образом, если основной причиной *длиннопериодных вариаций скорости* вращения *Земли* является изменение ее радиуса, которое, в свою очередь, вызвано процессами, происходящими в *ядре Земли*, и движение материков (плит) происходит по той же причине и тоже связано с изменением радиуса, то вполне может оказаться, что в течение некоторого времени наблюдения материи (плиты) двигались один относительно другого в одну сторону, затем в противоположную и так, что суммарный эффект перемещения равен нулю. Поэтому целесообразно постоянно сравнивать результаты *геодинамических проектов* с данными по наблюдению за скоростью вращения  $\omega$  .

Еще один способ контроля относительного изменения радиуса *Земли* состоит в наблюдении за изменением величины ускорения силы тяжести  $g$  , так как  $g = \frac{GM}{R^2}$  , причем  $\omega \approx \frac{1}{R^2}$  и  $g \approx \frac{1}{R^2}$  , то есть должна наблюдаться *корреляция* между  $\omega$  и  $g$  . Требование к точности и стабильности измерения величины

$g$  нами определены: она должна быть не хуже  $10^{-9}$  1/год, для чего необходимы чувствительность *гравиметра* (прибора, измеряющего величину  $g$ ) не хуже 1 мкГал и стабильность его примерно в 1 мкГал/год.

Один из лучших, наиболее чувствительных приборов для измерения величины  $g$  - *гравиметр ГАБЛ, разработанный в Институте автоматики и электрометрии СО РАН*, позволяет измерять  $g$  с погрешностью  $\pm 8$  мкГал. По мнению разработчиков *ГАБЛа*, принципиально возможно повысить чувствительность и стабильность прибора на порядок, что открывает перспективу использования его при решении *геодинамической* задачи - наблюдения за вариацией во времени величины ускорения силы тяжести, а значит и радиуса *Земли*.

Из предлагаемой нами модели *эволюции Земли* следует, что в процессе преобразования вещества  $G$ -ядра происходит его разуплотнение и возникает давление, направленное вдоль по радиусу от центра к дневной поверхности. Такие *геодинамические* процессы как *образование разломов, океанических хребтов, разрастание дна океанов, землетрясения, образование вулканов и алмазных трубок* можно рассматривать как следствие этого явления. Общим для таких процессов является то, что все они представляют собой различные в пространственном и временном масштабе способы *диссипации энергии*, выделяющейся при разуплотнении вещества  $G$ -ядра. Такой подход открывает возможность для проведения численных экспериментов, соответствующих тому или иному процессу, и имеющих целью получение более полных данных как о природе сил, так и о термодинамических условиях в среде при протекании исследуемого процесса.

Реализация предлагаемых экспериментов (как натуральных, так и численных) несомненно значительно расширила бы наши представления о *Земле и Солнечной* системе, независимо от того, верна предлагаемая модель или нет.

#### Список литературы

1. Джекобс Дж. Земное ядро. М.: Мир, 1979.
2. Матвеев Л. И. Сверхдальняя радиоинтерферометрия // Природа. 1982. № 7. С. 56-67.
3. Рингвуд А. Е. Происхождение Земли и Луны. М.: Недра, 1982
4. Яцкив Я. С. Международный проект МЕРИТ. Киев, 1981.

УДК 681.5

Алена Леонидовна Кравцова

Пятигорский государственный гуманитарно-технологический университет

#### ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>©</sup>

Обозначим через  $L$  дифференциальный оператор второго порядка, т.е.

$$L(y) \equiv \left[ p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) \right] y \quad (1)$$

где  $p_2', p_1', p_0$  представляют собой непрерывные функции в промежутке  $[a, b]$ . Если  $y(x)$  и  $u(x)$  - дважды непрерывно дифференцируемые на  $[a, b]$  функции, то имеем:

$$\int_a^x uL(y) dx = \int_a^x [(p_2u)y'' + (p_1u)y' + (p_0u)y] dx \quad (2)$$

$$a \leq x \leq b$$

Интегрирование соотношения (2) по частям дает:

$$\int_a^x uL(y) dx = [p_2uy' - (p_2u)'y + p_1uy]_a^x + \int_a^x [(p_2u)'' - (p_1u)' + p_0u] y dx \quad (3)$$

Обозначим дифференциальный оператор, входящий в подынтегральное выражение в правой части (3) через  $L^*$ , т.е.

$$L^*(u) \equiv (p_2u)'' - (p_1u)' + p_0u = \left[ p_2 \frac{d^2}{dx^2} + (2p_2' - p_1) \frac{d}{dx} + p_0 + p_2'' - p_1' \right] \cdot u \quad (4)$$

При этом соотношение (3) переписывается так:

$$\int_a^x [uL(y) - yL^*(u)] dx = [p_2(uy' - y'u) + (p_1 - p_2') \cdot uy]_a^x \quad (5)$$