Таким образом, исходя из всего выше рассмотренного, следует, что гребнесмазыватели не решают основную проблему колесной пары - эффективного снижения абразивного износа [2, с. 17].

С целью увеличения коэффициента тяги, в пару трения подается песок и, в тоже время, с целью уменьшения износа, в пару трения подается смазка. Песок является сильнейшим абразивом и значительно влияет на износ колеса и рельса. Кроме того, исследования показали, что после прохода первого колеса размол песка практически завершается, а поверхность песка увеличивается в 4-5 раз и становиться адсорбционно-активной средой, интенсивно поглощающей в своих порах смазку и влагу. В связи с этим, лубрикационные пленки на поверхности трения колесо-рельс после попадания на них песка выполняют разделительные свойства и не защищают ее от износа.

В современной промышленности все больше распространения получают самоорганизующиеся системы [1, с. 244]. Применение адаптивных регуляторов позволяет осуществлять управления с заданным качеством в технических системах, функционирующих в условиях неполной информации о текущем состоянии объекта. Возможности, открываемые такими системами, являются перспективными для решения проблем «колесо-рельс», а способность к адаптации обеспечит подачу смазки в момент трения и износа гребня колеса.

Список литературы

1. **Антонов В. Н.** Адаптивное управление в технических системах: учеб. пособие. СПб., 2001. 244 с.
2. **Балановский А. Е.** Исследование триботехнических свойств гребней колесных пар подвижного состава после плазменного упрочнения // Сварка в Сибири. 1999. № 3.
3. **Мартовский В. А.** Система смазки гребней колес СПП 12-5. Пусть гибнет смазка за металл // Магистраль. 2004. 19 марта.
4. **Назаров А. В.** Новое решение проблемы износа пары трения «реборда колеса - рельс» // Материалы IV Уральского конгресса. Екатеринбург, 2010.
5. **http://www.teplovozcontrol.ru/special/grebnesmaz.php**

УДК 532.59

Ольга Анатольевна Пыркова
Московский физико-технический институт (государственный университет)

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ ЛИНИИ ТОКА©

Для вертикального смещения линии тока $\overline{\xi}$ было получено неоднородное уравнение Гельмгольца [7]:

$$\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\,\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\,\overline{y}^2}+k_0{}^2a^2\overline{\xi}=\overline{f}_y+\overline{\Omega}_0 \qquad (1)$$

с граничным условием типа Дирихле:

$$\overline{\xi}=\sin\theta \qquad (2)$$

Прежде, чем решать поставленную задачу, рассмотрим, вводя обозначения $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\,\overline{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\,\overline{y}^2}$, $k^2=k_0{}^2a^2$ для краткости записи, решение однородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\overline{\xi}+k^2\overline{\xi}=0 \qquad (3)$$

с теми же граничными условиями (2) [2].

Нас интересует решение этого уравнения для неограниченного пространства (так называемая внешняя краевая задача). Оно, как известно [3], существенно зависит от знака k^2.

Согласно ранее введенному обозначению [7] $k_0{}^2=\frac{N^2}{\mathbf{U}_0{}^2}$ $\left(N^2=-\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\,\rho_0}{\partial\,y}\right)$, для устойчиво стратифицированного потока k действительно, $k^2>0$ и решение имеет колебательный характер. Для потока с неустойчивой стратификацией k чисто мнимое, $k^2<0$ и решение имеет характер обычного затухания. Необходимо, кроме того, отметить, что в случае $k^2>0$ для получения единственного решения внешней краевой задачи одного условия типа (2) недостаточно. В таких случаях приходится прибегать к использованию дополнительных условий, определяющих поведение решения на бесконечности.

Обычно уравнение Гельмгольца решают методом разделения переменных. Этот метод позволяет находить точное решение лишь в тех случаях, когда граничное условие задается на одной из координатных плоскостей, в которых переменные разделяются.

Реальное препятствие, например, горный хребет, никогда не совпадает с какой-нибудь из таких поверхностей. Однако для выяснения основных особенностей возмущающего действия препятствия на поток вполне оправдана аппроксимация профиля реального препятствия достаточно гладкой кривой, тем более что, как правило, общие горизонтальные размеры препятствий много больше их высоты.

Будем рассматривать случай, когда профиль препятствия, например, хребта, в плоскости xy совпадает с полуокружностью радиуса a. В случае произвольного достаточно гладкого профиля, решение на некотором расстоянии от препятствия может быть найдено, например, при использовании линеаризованного граничного условия [10].

Поместим начало координат в центр полуокружности и введем полярные координаты:

$$\overline{x} = r\cos\varphi,\ \overline{y} = r\sin\varphi,\ r \geq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi \tag{4}$$

(В эллиптических координатах можно совершенно таким же образом решить задачу для эллипса).

Уравнение (3) для $\overline{\xi}$ в новых координатах будет иметь вид

$$r^2\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial r^2} + r\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial r} + \frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\varphi^2} + k^2r^2\overline{\xi} = 0 \tag{5}$$

Граничное условие преобразуется в два условия:

$$\overline{\xi}(r,0) = \overline{\xi}(r,\pi) = 0,\ r \geq 1 \tag{6}$$

$$\overline{\xi}(1,\varphi) = \sin\varphi \tag{7}$$

Очевидно, что переменные разделяются и решение уравнения (5) можно искать в виде произведения функций, зависящих только от r и φ: $\overline{\xi} = F(r)\cdot Q(\varphi)$. Тогда

$$r^2F''(r)\cdot Q(\varphi) + rF'(r)\cdot Q(\varphi) + F(r)\cdot Q''(\varphi) + k^2r^2F(r)\cdot Q(\varphi) = 0$$

и, разделяя переменные, получаем

$$\frac{r^2F''(r) + rF'(r) + k^2r^2F(r)}{F(r)} = -\frac{Q''(\varphi)}{Q(\varphi)} = \nu^2$$

Уравнения для $F(r)$ и $Q(\varphi)$ при этом имеют вид:

$$r^2\frac{\partial^2F}{\partial r^2} + r\frac{\partial F}{\partial r} + \left(k^2r^2 - \nu^2\right)F = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2Q}{\partial\varphi^2} + \nu^2Q = 0 \tag{9}$$

где ν - постоянная разделения переменных.

Решение уравнения (9) имеет вид

$$Q_\nu(\varphi) = C_1\sin\nu\varphi + C_2\cos\nu\varphi$$

В силу граничного условия (6) $\overline{\xi}(r,0) = 0$, т.е. $Q_\nu(0) = 0$, и, следовательно $C_2 = 0$. Т.к. $\overline{\xi}(r,\pi) = 0$, т.е. $Q_\nu(\pi) = 0$, то получаем $C_1\sin\nu\varphi = 0$, и, следовательно, постоянная разделения переменных принимает целые значения $\nu = n = 1, 2, 3, \ldots$

Таким образом, решение уравнения (9) имеет вид

$$Q_n(\varphi) = \sin n\varphi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

При этом уравнение (6) является уравнением Бесселя n-го порядка. Для действительных k (устойчивая стратификация) его решения определяются функциями Бесселя действительного аргумента, в случае чисто мнимых k - функциями Бесселя мнимого аргумента. Первые из них являются колеблющимися, вторые - экспоненциальными. Отсюда непосредственно следует, что при преодолении препятствий возмущения в виде волн могут существовать лишь в тех средах, которые перед препятствием стратифицированы устойчиво. Этот случай, очевидно, представляет преимущественный интерес; поэтому в дальнейшем полагается, что натекающий поток стратифицирован устойчиво.

Представляя решение уравнения (8) для конкретного значения n в виде комбинации из функций Бесселя первого рода $J_n(kr)$ и функций Вебера $Y_n(kr)$ [1], полное решение уравнения (5) можно записать следующим образом:

$$\overline{\xi}(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_nJ_n(kr) + B_nY_n(kr)\right]\sin n\varphi \tag{10}$$

где A_n и B_n - подлежащие определению коэффициенты.

Граничное условие (7) позволяет определить соотношение между коэффициентами A_n и B_n и, значит, исключить из (10) один из неопределенных коэффициентов:

$$A_1=\frac{1}{J_1(k)}-\chi_1B_1,\ A_n=-\chi_nB_n \text{ для } n\ge 2$$

$$\bar{\xi}(r,\varphi)=\frac{1}{J_1(k)}J_1(kr)\sin\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[Y_n(kr)-\chi_nJ_n(kr)\right]\sin n\varphi \tag{11}$$

где

$$\chi_n=\frac{Y_n(k)}{J_n(k)}$$

В выписанном решении коэффициенты B_n остаются неопределенными. Требование ограниченности решения при больших r не дает возможности избавиться от этой неопределенности в силу ограниченности обеих функций $J_n(kr)$ и $Y_n(kr)$. Для вычисления однозначного решения воспользуемся исследованиями Магнуса [9], который, в частности, показал, что в задаче на плоскости для получения однозначного решения достаточно потребовать, чтобы решение уравнения Гельмгольца $\bar{\xi}$ υ удовлетворяло двум условиям:

1) для некоторой не зависящей от координат постоянной M:

$$\left|\sqrt{r}\bar{\xi}\right|\le M$$

2) для всех углов из некоторого промежутка, меньшего π:

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\bar{\xi}=0$$

Первое из этих требований фактически является условием некоторой обобщенной ограниченности; решение (11) этому условию удовлетворяет. Второе является требованием особо быстрого затухания решения вдоль некоторых избранных направлений, причем затухание вдоль таких направлений должно происходить быстрее, чем убывает с ростом r величина $1/\sqrt{r}$. В рассматриваемой здесь задаче выделенным, очевидно, является направление скорости натекающего потока. При этом физически ясно, что затухание решения (11) навстречу потоку должно быть наибольшим.

Поэтому для получения единственного решения задачи будем требовать выполнения условия, выписанного выше для направления $\varphi=\pi$. (Подобным условием до исследования Магнуса для выделения единственного решения уравнения Гельмгольца пользовался Лира [8]). Так как $\bar{\xi}\big|_{\varphi=\pi}=0$ для всех $r\ge 1$, а решение (9) всюду непрерывно, второе из выписанных условий, следуя [10], будем использовать в форме

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\pi}=0 \tag{12}$$

что равносильно требованию

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{|x|}\ u\big|_{y=0}=0$$

причем через u здесь обозначено возмущение горизонтальной скорости. Выражение для $\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\pi}$ в соответствии с (11) имеет вид

$$\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\pi}=-\frac{1}{J_1(k)}J_1(kr)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nB_n\left[Y_n(kr)-\chi_nJ_n(kr)\right]$$

Подставим выписанное выражение в условие (12). Так как это условие ставится как предельное при $r\to\infty$, функции $J_n(kr)$ и $Y_n(kr)$ будем заменять их асимптотическими разложениями [1]

$$J_n(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)+e^{|\mathrm{Im}\,z|}O\left(\left|z^{-1}\right|\right)\right\}$$

$$Y_n(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac{1}{2}\mathrm{n}\pi-\frac{1}{4}\pi\right)+e^{|\mathrm{Im}\,z|}O\left(\left|z^{-1}\right|\right)\right\}$$

$$\left(|\arg z|<\pi\right),$$

в которых $\sin\left(kr+\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\cos\left(kr+\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ предварительно преобразуем к функциям с аргументом $\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)$. После соответствующего группирования слагаемых получим уравнение следующего вида:

$$\sin\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0B_i+\frac{1}{2kr}\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1B_i-\frac{(1,1)}{J_1(k)}\right]+\frac{1}{(2kr)^2}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2B_i+...\right\}+ \quad (13)$$

$$+\cos\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty}b_i^0B_i+\frac{1}{J_1(k)}\right]+\frac{1}{2kr}\sum_{i=1}^{\infty}b_i^1B_i+\frac{1}{(2kr)^2}\left[\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2B_i-\frac{(1,2)}{J_1(k)}\right]+...\right\}=0$$

где a_i^l, b_i^l (l=0, 1, 2, ...) - известные коэффициенты, $(m,n)=\dfrac{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}{n!\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}$

Так как уравнение (13) должно выполняться (для достаточно больших r) независимо от величины r, то, приравнивая к нулю коэффициенты при слагаемых вида $\frac{1}{r^n}\sin\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)$ и $\frac{1}{r^n}\cos\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)$, получаем из (13) необходимую нам систему для определения коэффициентов B_n.

Не останавливаясь детально на разборе получаемой системы, отметим лишь, что для практических расчетов, как показано в работе [10], достаточно учитывать лишь несколько первых, получаемых таким путем коэффициентов.

Список литературы

1. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
2. **Кожевников В. Н.** К одной нелинейной задаче об орографическом возмущении стратифицированного воздушного потока // Изв. АН СССР. Сер. «Геофиз.». 1963. № 7. С. 1108-1116.
3. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962.
4. **Пыркова О. А.** О влиянии вязкости на амплитуду внутренних волн в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. ст. 9-й всероссийской научной конференции (28-29 ноября 2008 г., Новокузнецк): в 3-х т. Новокузнецк, 2008. Т. 1. С. 112-117.
5. **Пыркова О. А.** О влиянии вязкости на затухание распространяющихся внутренних волн, возбужденных при обтекании препятствия на дне // Моделирование процессов управления и обработка информации: междувед. сб. МФТИ. М., 1996. С. 182-189.
6. **Пыркова О. А.** О возможности приближенного учета действия вязкости в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: междувед. сб. МФТИ. М., 1995. С. 154-165.
7. **Пыркова О. А.** Сведение системы уравнений обтекания цилиндра к уравнению для вертикального отклонения линии тока в плоском случае // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 2 (45). С. 46-49.
8. **Lyra G.** Teorie der stationären Leewellenstromung in freien Atmosphäre // Z. angew. Math. und Mech. 1943. 23. II. 1.
9. **Magnus W.** Fragen der Eindeutigkeit und des Verhaltens im Unendlichen // Mathematischer Seminar der Universität Hamburg. 1949. 16. № 6. 1/2. Mai.
10. **Merbt H.** Solution of Two-Dimensional Lee-Wave Equation for Arbitrary Mountain Profiles, and Some Remarks on the Horizontal Wind Component in Mountain Flow // Beitr. Physik der Atmosphäre. 1959. № 31.

УДК 621

Владимир Леонидович Санжак
Институт космических исследований, г. Таруса

КОМПЬЮТЕРНАЯ ОБРАБОТКА СНИМКОВ КОСМИЧЕСКИХ МИКРОЧАСТИЧ, ПРОЛЕТАЮЩИХ ЧЕРЕЗ РЕГИСТРИРУЮЩИЕ СРЕДЫ©

Характеристика объекта исследования: пролетающие через регистрирующие среды, размещённые на космических аппаратах, космические микрочастицы, оставляющие свои следы в этих средах и снимки которых пересылаются на Землю. Задачей является обработка экспериментальных данных, получаемых в виде упомянутых снимков пролетающих космических частиц через, например, ПЗС матрицу.

Одной из целей является построение графиков распределения плотности частиц по градиенту яркости, по регистрационному снимку на пластинке ПЗС матрицы со спутника, другими словами, нахождение интегрального распределения частиц по привнесённому ими энергетическому спектру.

Все проходящие через матрицу частицы, в том числе заряженные электроны, протоны, и т.п., отображаются на снимке в виде точек (мелких и «жирных») и треков разной протяженности, толщины и формы.
