Торшина Ольга Анатольевна
СЛЕДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/4/72.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2012. № 4 (59). C. 220-222. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/4/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

процесс роста российских городов, характеризуя процент городского населения на Урале как «...самый низкий, [а] индустриальное внегородское население двух только уездных городов (Красноуфимского и Екатеринбургского; Пермской губернии) больше городского населения всей губернии...» [15, с. 567]. Основная масса рабочих находилась в фабрично-заводских центрах, а горнорабочие тоже размещались «...главным образом вне городов», что являлось одной из особенностей формирования горнозаводских рабочих на Урале, наряду с его высокой концентрацией [Там же, с. 521].

Вскрыв особенности социально-экономического развития края в пореформенный период, Ленин отмечал медленный рост горнозаводского производства, как следствие завершившегося промышленного переворота.

В целом ленинские наблюдения, основанные на достаточно репрезентативной источниковой базе, на широко используемом сравнительном методе, дают возможность предположить, что процесс урбанизации на Урале к началу XX ст., происходит низкими темпами, в отличие от других российских регионов, от быстро развивающихся в регионе фабрично-заводских центров.

Таким образом, для второго периода в развитии дореволюционной историографии Урала свойственно количественное преобладание работ описательного характера, что являлось общей тенденцией для дореволюционной историографии Урала в целом и для городоведения, в частности. Резко увеличивается общее количество работ по различным аспектам края. «Если за первую половину XIX в. было издано около 100 (наименований работ), то за 1861-1917 гг. появилось свыше 300 публикаций по данной тематике» [23, с.55]. Вместе с тем в рассматриваемый период в истории изучения Урала более чётко вырисовываются контуры разрыва между значительным запасом исторических знаний, извлекаемых из обширнейшего массива источников и уровнем его теоретического осмысления, что приводит к преобладанию фактологического описательного подхода в целом ряде исторических работ второй половины и XIX - начала XX в., и было характерно, прежде всего, для краеведческой литературы.

В то же время в рамках либерально-буржуазной, народнической и марксистской историографии предпринимаются попытки более глубокого анализа социально-экономического, общественно-политического, социокультурного развития региона, что создавало основу для изучения развития уральских городов.

Список литературы

1. **Алекторов А.** История Оренбургской губернии. Оренбург, 1883.
2. **Алферова Е. Ю.** Социально-экономическое развитие городов Урала в 60-90-е годы XIX в.: автореф. дисс. … канд. ист. наук. Екатеринбург, 1994.
3. **Белавин К.** Оренбург: географо-статистический очерк. Оренбург, 1891.
4. **Белов В. Д.** Железные дороги на Урале в целях развития горнозаводского дела. Нижний Новгород, 1887.
5. **Белов В. Д.** Исторический очерк уральских горных заводов. СПб., 1896.
6. **Белов В. Д.** Кризис уральских горных заводов. СПб., 1910.
7. **Берви-Флеровский В. В.** Положение рабочего класса в России // Берви-Флеровский В. В. Избранные произведения. М.,1958. Т. 1.
8. **Блинов Н. Н.** К столетнему юбилею города Сарапула. Сарапул, 1880.
9. **Верхоланцев В. С.** Город Пермь, его прошлое и настоящее: краткий историко-статистический очерк. Пермь, 1913.
10. **Верхоланцев В. С.** Летопись г. Перми с 1890 по 1912. Пермь, 1913.
11. **Весновский В. А.** Спутник туриста по Уралу. Екатеринбург, 1902.
12. **Голубев П. А.** Историко-статистические таблицы по Пермской губернии. Пермь, 1904.
13. **Гурвич Н.** К истории земской статистики Уфимской губернии // Уфимские губернские ведомости. 1884. № 2-30.
14. **Гурвич Н.** Статистические очерки Уфимской губернии. Уфа, 1880. Вып. 1.
15. **Ленин В. И.** Развитие капитализма в России // Ленин В. И. Полн. собр. соч. 5-е изд. М., 1958-1965. Т. 3.
16. **Мамин-Сибиряк Д. Н.** Город Екатеринбург. Екатеринбург: Изд-во И. И. Симанова, 1889.
17. **Мамин-Сибиряк Д. Н.** Старая Пермь: путевые очерки // Вестник Европы. СПб., 1889. Кн. 7.
18. **Мозель Х.** Материалы для географии и статистики Пермской губернии. СПб., 1864. Ч. 2.
19. **Первая всеобщая перепись населения Российской империи - 1897.** СПб., 1904.
20. **Семенов-Тян-Шанский В. П.** Город и деревня в Европейской России. СПб., 1910.
21. **Столпянский П. Н.** Город Оренбург: материалы к истории и топографии города. Оренбург, 1908.
22. **Уральская историческая энциклопедия.** Изд. 2-е, перераб. и доп. Екатеринбург, 2000.
23. **Усанов В. И., Свечников П. Г.** Летописцы старого Урала. Челябинск, 1995.

УДК 517.5
Физико-математические науки

Ольга Анатольевна Торшина
Магнитогорский государственный университет

СЛЕДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ©

Теория регуляризованных следов линейных операторов берёт своё начало с фундаментального факта конечномерной теории - инвариантности матричного следа линейного оператора и совпадении его со спектральным следом, и исследует вопрос о распространении понятия инвариантности следа на неограниченные операторы.

© Торшина О. А., 2012

Принципиальным прорывом в теории следов стало применение методов теории функций для исследования дзета-функции оператора в работе В. Б. Лидского и В. А. Садовничего [2], на основе которого были исследованы характеристические определители многих спектральных задач, в том числе задач для регулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Полностью все характеристические определители регулярных обыкновенных дифференциальных операторов были охвачены в работе В. А. Садовничего и В. А. Любишкина [4]. Первым на связь теории регуляризованных следов с теорией возмущений дискретного спектра абстрактных операторов указал Л. А. Дикий [1], и первый результат в этом направлении был получен в работе Хальберга и Крамера [7]. Затем в работе Гильберта и Крамера [6] для самосопряжённых операторов были получены формулы регуляризованных следов с регуляризацией, состоящей из нескольких поправок теории возмущений, и в качестве примера были доказаны формулы следов порядка выше первого. Крупным продвижением после длительного отсутствия результатов стала работа В. А. Садовничего и В. В. Дубровского [3]. Абстрактная теорема этой работы позволила в качестве примера впервые рассмотреть дифференциальный оператор в частных производных.

Настоящая работа посвящена вычислению регуляризованных следов дифференциальных операторов с частными производными.

Рассмотрим дискретный самосопряженный оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве G. Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственные числа оператора T. Предположим, что $N(\lambda)=O(\lambda^p)$, где p<1 и $N(\lambda)=\sum\limits_{\mu_N\le\lambda}1$. Пусть γ - некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $\gamma>\dfrac{1}{1-p}$.

Лемма 1. *Существует последовательность действительных чисел* $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, $n^{\gamma}\le a_{\pm n}\le(n+1)^{\gamma}$, $n=\overline{0,\infty}$, *такая, что* $d_n=d_n\left(a_n,\sigma(T)\right)\ge const|n|^{\gamma(1-p)-1}$, *где* $const$ *не зависит от* n, *а* $d\left(\lambda,\sigma(T)\right)$ *- расстояние от точки* λ *до спектра оператора T.*

Обозначим $l_k=\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda=a_k\}$ и пусть λ_{n_k} и $\lambda_{n_{k+1}}$ - ближайшие к прямой l_k собственные числа оператора T, расположенные соответственно слева и справа.

Согласно Лемме 1

$$\left|\lambda_{n_k}-\lambda_{n_{k-1}}\right|\ge const\cdot k^{\gamma(1-p)-1}$$

Пусть P - ограниченный оператор, определенный всюду в G. Обозначим $\Gamma_к$ прямоугольный контур на λ -плоскости с вершинами в точках (a_{-k},a_k), (a_k,a_k), $(a_k,-a_k)$, $(a_{-k},-a_k)$.

Лемма 2. *Оператор T+P является дискретным оператором. При достаточно больших k все точки контура* $\Gamma_к$ *являются точками регулярности оператора T+P; все собственные числа оператора T+P, лежащие в полосе* $a_{-k}\le\operatorname{Re}\lambda\le a_k$, *попадают внутрь прямоугольника* $\Gamma_к$; *число собственных чисел операторов T и T+P внутри контура* $\Gamma_к$ *совпадает; на контуре* $\Gamma_к$ *справедливо соотношение*

$$R_\lambda(T+P)=R_\lambda(T)+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k R_\lambda(T)\left[PR_\lambda(T)\right]^k+B_N, \qquad (1)$$

где $B_N=R_\lambda(T+P)\left[PR_\lambda(T)\right]^{N+1}$.

Умножая соотношение (1) на $\lambda^m i/2\pi$ и интегрируя по контуру $\Gamma_к$ (m - натуральное число), получим:

$$P_{\Gamma_K}(m,T+P)=P_{\Gamma_K}(m,T)+\sum_{\upsilon=1}^{N}(-1)^{\upsilon}C_{\Gamma_k}^{\upsilon}(m)+D_{\Gamma_k}^{N}(m), \qquad (2)$$

где

$$P_{\Gamma_K}(m,T+P)=\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T+P)\,d\lambda,$$

$$P_{\Gamma_K}(m,T)=\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T)\,d\lambda,$$

$$C_{\Gamma_k}^{(\upsilon)}(m)=\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T)\left[PR_\lambda(T)\right]^{\nu}d\lambda,\ \nu=\overline{1,N},$$

$$D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)=\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T+P)\left[PR_\lambda(T)\right]^{N+1}d\lambda.$$

Лемма 3. *Операторы* $P_{\Gamma_k}(m,T+P)$, $P_{\Gamma_k}(m,T)$, $C_{\Gamma_k}^{(\nu)}(m)$, $\nu=\overline{1,N}$, $D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)$ *являются конечномерными, причем* $\dim D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)=O\left(k^{4\gamma p}\right)$ *при* $k\to\infty$.

Лемма 4. *Норма оператора* $D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)$ *есть величина*

$O\left[k^{-(N+2)[\gamma(1-p)-1]+(m+`)\gamma}\right]$ *при* $k \to \infty$.

Лемма 5. *Пусть B - конечномерный оператор, действующий в гильбертовом пространстве G. Тогда* $|Sp(B)| \le \|B\| \dim B$.

Согласно Лемме 2 внутри контура Γ_κ при достаточно больших κ находится одинаковое число собственных чисел оператора $T+P$ и T, в результате собственные числа μ_i оператора $T+P$ можно занумеровать в порядке возрастания вещественных частей, используя индексы от n_{-k} до n_k.

Лемма 6. *Имеют место соотношения*

$$SpP_{\Gamma_k}(m,T+P) = \sum_{i=n_{-k}}^{n_k} \mu_i^m,$$

$$SpP_{\Gamma_k}(m,T) = \sum_{i=n_{-k}}^{n_k} \lambda_i^m,$$

$$SpC_{\Gamma_k}^{(\upsilon)}(m) = -Sp\frac{i}{2\pi}\frac{m}{\nu}\int_{\Gamma_k} \lambda^{m-1}\left[R_\lambda(T)P\right]^\nu d\lambda.$$

Взяв след от обеих частей равенства (2) и применяя Лемму 6 и теорему Коши о вычетах, получим

$$\sum_{i=n_{-k}}^{n_k}\left(\mu_i^m - \lambda_i^m + mSp\,\mathrm{Re}\,s_{\lambda_i}\left\{\lambda^{m-1}\left[R_\lambda(T)P\right]\right\} + ... + ...\frac{m}{N}Sp\,\mathrm{Re}\,s_{\lambda_i}\left\{\lambda^{m-1}\left[R_\lambda(T)P\right]^N\right\}\right) = SpD_{\Gamma_k}^{(N)}(m) \qquad (3)$$

Применяя Леммы 3-6, получим

$$SpD_{\Gamma_k}^{(N)}(m) = O\left[\frac{1}{k^{(N+2)[\gamma(1-p)-1]-(m+1)\gamma-4\gamma p}}\right]$$

В результате при $\mathrm{N} > \dfrac{\gamma(\mathrm{m}+1+4\mathrm{p})}{\gamma(1\text{-}\mathrm{p})-1} - 2$

$SpD_{\Gamma k}^{(N)}(m) \to 0$ при $k \to \infty$

Таким образом, приходим к основной теореме.

Теорема. *Пусть T - самосопряженный дискретный оператор, действующий в гильбертовом пространстве G, такой, что* $N(\lambda)O(\lambda^p)$, *0<p<1. Пусть* γ *- некоторое число, удовлетворяющее условию* $\gamma > \dfrac{1}{1-p}$, *P - ограниченный оператор в G. Тогда между собственными числами* μ_κ *оператора T+P и собственными числами* λ_κ *оператора T можно установить взаимно однозначное соответствие так, что существует подпоследовательность целых чисел* n_κ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=n_{-k}}^{n_k}\left[\mu_i^m - \lambda_i^m + mSp\,\mathrm{Re}\,s_{\lambda_i}\left[\lambda^{m-1}\left(R_\lambda(T)P\right)\right] + ... + \frac{m}{N}Sp\,\mathrm{Re}\,s_{\lambda_i}\left[\lambda^{m-1}\left(R_\lambda(T)P\right)^N\right]\right] = 0$$

при $N > \dfrac{\gamma(m+1+4p)}{\gamma(1-p)-1} - 2$

Список литературы

1. **Дикий Л. А.** Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13. Вып. 3. С. 111-143.
2. **Лидский В. Б., Садовничий В. А.** Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функ. ан. и его прил. 1967. Т. 1. № 2. С. 52-59.
3. **Садовничий В. А., Дубровский В. В.** О некоторых соотношениях для собственных чисел дифференциальных операторов. Формулы следов для дифференциальных операторов в частных производных // Дифф. уравнения. 1977. Т. 13. JM1. С. 2033-2042.
4. **Садовничий В. А., Любишкин В. А.** Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа // ДАН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 794-798.
5. **Торшина О. А.** Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с негладким потенциалом на проективной плоскости // Дифференциальные уравнения и их приложения. Самара, 2006. С. 32-40.
6. **Gilbert R. C., Kramer V. A.** Trace Formulas for Powers of a Sturm-Liouville Operator // Canad. J. Math. 1964. V. 16. JM. P. 412-422.
7. **Halberg C. J. A., Kramer V. A.** A Generalization of the Trace Concept // Duke Math. J. 1960. V. 27. P. 607-628.