Гаврилова Мария Олеговна
О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2012. № 5 (60). C. 29-32. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/5/

Во многом способствуют повышению компетентности педагогов курсы повышения квалификации. Изменяются требования к уровню преподавания в современной школе - изменяется и содержание курсов, их методическая направленность; педагоги не только получают новые знания, но и пополняют свою «методическую копилку». Так, за последние 3 года 15 педагогических работников нашей школы (а в настоящее время в школе трудятся 24 педагога) прошли курсы повышения квалификации (некоторые досрочно) в ГАОУ АО ДПО «Астраханский институт повышения квалификации и переподготовки» по различным программам.

Безусловно, повышению профессионального мастерства, выявлению творчески работающих педагогов и пропаганде их передового опыта способствует аттестация педагогических работников. В настоящее время 5 педагогических работников уже аттестованы по первой и высшей квалификационной категории по должности «учитель» и «воспитатель», 4 педагога готовятся к аттестации педагогических работников образовательных учреждений, реализующих программы VШ вида, в этом учебном году (до 2011 года в школе из 18 учителей и воспитателей только 2 педагога имели высшую квалификационную категорию, 4 - первую).

Одним из направлений кадровой политики в ГБСКОУ АО «СКОШИ № 6 VIII вида» стало повышение профессиональной компетентности педагогов посредством обучения их на факультете дополнительного профессионального образования Астраханского государственного университета. В образовательном учреждении работали только 4 педагога со специальным образованием. В настоящее время по инициативе администрации 13 учителей и воспитателей являются слушателями курсов «Коррекционная работа педагога-дефектолога с детьми с ограниченными возможностями здоровья». На последнем в этом учебном году методическом совете планируется проведение круглого стола с обсуждением практической направленности дипломных работ слушателей курсов (защита дипломов пройдёт 5-6 апреля 2012 года) с целью применения в повседневной деятельности новейших технологий, которые будут способствовать дальнейшему повышению качества образования детей с ограниченными возможностями здоровья, обучающихся в нашем образовательном учреждении.

Надеемся, что опыт работы нашего педагогического коллектива поможет в практической деятельности как руководителям, так и педагогам специальных (коррекционных) образовательных учреждений.

УДК 519.853
Физико-математические науки

Мария Олеговна Гаврилова
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ©

Задачи кусочно-линейного программирования (КЛП) (см., напр., [4]) рассматриваются в теории математического программирования в дизъюнктивной постановке. Другими словами, допустимая область задач КЛП задается объединением множеств (многогранников), а не их пересечением, в отличие от традиционной постановки задач линейного программирования.

В данной статье изучается общая постановка задачи КЛП как результат обобщения задач математического программирования. Рассматриваются некоторые методы решения задачи КЛП при дополнительных условиях непрерывности и выпуклости функций системы ограничений и целевой функции.

Постановка задачи. Определим класс кусочно-линейных функций, заданных на множестве $X \subset R^n$. Воспользуемся для этого схемой, предложенной в [Там же]. Пусть имеются конечные совокупности многогранников $\{M_j\}_I$ и собственных линейных функций $\{l_j\}_I$. Будем говорить, что система $\{M_j, l_j\}_I$ задает однозначную кусочно-линейную функцию $g(x)$ на X, если выполнены следующие условия:

$$\bigcup_{j\in I} M_j = X, \; M_j^o \cap M_i^o = \varnothing \text{ при } i \neq j \tag{1}$$

$$g(x) = l_j(x), \; x \in M_j, \; j \in I \tag{2}$$

Здесь M_j^0 - алгебраическая внутренность многогранника M_j, т.е. $y \in M_j^0 \Leftrightarrow y + ts \in M_j$ при любом $s \in X$ и достаточно малом $t > 0$. Многогранник, как обычно, это множество, задаваемое конечной системой собственных линейных неравенств $(l_k, x) - b_k \le 0$, $k \in K$.

В дальнейшем будем считать $X = R^n$, а множество всех кусочно-линейных функций на R^n будем обозначать через L, сами же функции из L называются $k-$функциями.

Заметим, что если две $k-$функции $f(x)$ и $g(x)$ задаются системами $\{M_j, l_j\}_J$, $\{D_i, m_i\}_I$ соответственно, то существует такая система многогранников и линейных функционалов $\{T_s, p_s\}_{s\in S}$, с помощью которой можно задать и $f(x)$ и $g(x)$.

Чтобы убедиться в этом, выделим общие части многогранников D_i и M_j. Так, положим $T_{ij} = D_i \cap M_j$, при этом алгебраические внутренности многогранников T_{ij} не пересекаются.

Так как $T_{ij} \subset D_i$, $T_{ij} \subset M_j$, то в силу свойств выпуклых множеств, многогранники D_i и M_j представимы в виде $D_i = \bigcup_j T_{ij} + \bigcup_m T'_{mj}$, $M_j = \bigcup_i T_{ij} + \bigcup_p T''_{ip}$, при этом алгебраические внутренности соответственно многогранников T'_{mj} и многогранников T''_{ip} не пересекаются.

Таким образом, существует множество многогранников, обозначим их T_s, $s \in S$, таких что $T_s = \bigcup (T_{ij}, T'_{mj}, T''_{ip})$, $T^o_k \cap T^o_p = \varnothing$ при $k \neq p$.

Далее рассмотрим сужения функций $f(x)$, $g(x)$ на каждый из многогранников из T_s, и обозначим полученную в результате $k-$функцию - $p(x)$:

$p(x) = p_s(x), x \in T_s, s \in S$

Итак, можно утверждать, что при помощи системы многогранников и линейных функционалов $\{T_s, p_s\}_{s\in S}$ можно задать $k-$функции $f(x)$ и $g(x)$.

Теперь задачи КЛП получаются из задач математического программирования таким образом, что в описании задач КЛП участвуют только $k-$функции. Например, задача

$$\max f(x) \text{ при } g_i(x) \geq 0, \qquad (3)$$

$$f, g_i \in L,\ i = 1,...,m,\ (x \geq 0)$$

означает, что ищется наибольшее значение функции $f(x)$ среди тех x, которые удовлетворяют системе неравенств $g_i(x) \geq 0$, $i = 1,...,m$, причем функции $f(x)$, $g(x)$, $i = 1,...,m$, являются $k-$функциями.

Экономические ситуации, ведущие к необходимости построения и решения задачи КЛП, в своей основе чаще всего имеют некоторое правило изменения экономических характеристик в зависимости от величины переменных x. В качестве примера можно привести задачу о наилучшем использовании ресурсов с эффектом экономии на масштабах производства, задачу о выборе оптимальных технологий с переменными коэффициентами технологической матрицы, задачу о составлении оптимального рациона питания с учетом нелинейных свойств процесса усвоения питательных веществ организмом [3] и т.п. В ряде случаев, в том числе при наличии некоторых внешних ограничений на параметры изучаемых задач, область допустимых решений задачи представляет собой выпуклое множество.

Далее рассмотри некоторые методы решения задач КЛП в условиях выпуклости $k-$функций.

Методы решения выпуклой задачи КЛП

Потребуем, чтобы в постановке задачи (3) целевая функция $f(x)$ и функции $g_i(x)$ были выпуклы.

Выпуклость функций ограничений $g_i(x)$ влечет выпуклость каждого задаваемого ими многогранника решений T_l и равносильна выпуклости области допустимых решений $T = \cap T_l$. Это утверждение следует из следующего свойства выпуклых множеств: пересечение выпуклых множеств $T = \cap T_l$ само является выпуклым множеством.

Дополнительно потребуем непрерывность функций $f(x)$ и $g_i(x)$.

Методы решения данной задачи при дополнительных условиях непрерывности и выпуклости функций рассмотрены в [2].

1. Прямым методом решения задачи (3) является перебор многогранников T_s, для каждого из которых решается задача линейного программирования с линейной целевой функцией и выпуклой областью допустимых решений и определяется оптимальное решение x^s. Решением всей задачи (3) является x^*, для которого целевая функция максимальна: $f^*(x^*) = \max_s \{f(x^s)\}$.

2. Более экономный с точки зрения числа итераций подход к решению задачи (3) можно провести по следующему алгоритму.

На множестве $T = \bigcup T_s$ зададим некоторую сетку точек с достаточно малым шагом $\alpha > 0$. Для каждого многогранника T_s имеем стандартную задачу линейного программирования с линейной целевой функцией $f^s(x)$:

$$f^s(x) \to \max$$

$$(p_s, x) - b_s \leq 0,\ s \in S \qquad (4)$$

$$x \geq 0,\ x \in T_s$$

Задача (4) решатся с помощью любого известного метода, например, симплекс-методом. В результате решения данной задачи находится точка $x^k \in T_k$, $k \in S$.

Первый шаг алгоритма заключается в переходе из x^k в ближайшую узловую точку сетки, принадлежащую области допустимых решений T, т.е. в такую точку $x_\alpha^k \in T$, для которой выполнено соотношение $\left|x^k - x_\alpha^k\right| = \max\limits_{x_\alpha \in T}\left|x^k - x_\alpha^k\right|$ по всем окрестным узловым точкам $x_\alpha \in T$.

На втором шаге алгоритма определяются смежные с x_α^k узловые точки сетки $x_{\alpha_t}^k$ $\left(t = \overline{1,p}\right)$, принадлежащие области допустимых решений. Каждая из найденных узловых точек $x_{\alpha_t}^k$ может принадлежать одному или одновременно нескольким многогранникам из T. Для каждого «затронутого» точками $x_{\alpha_t}^k$ многогранника решается соответствующая задача линейного программирования (4), затем среди множества полученных решений выбирается оптимальное x^{k+1} такое, для которого целевая функция принимает максимальное значение.

Далее опять производится переход из x^{k+1} в ближайшую узловую точку x_α^{k+1} и осуществляется повтор второго шага алгоритма. Алгоритм завершает свою работу, когда найденное решение x^{k+1} окажется равным оптимальному решению x^k, полученному на предыдущем этапе.

3. Далее рассмотрим способ решения, который основан на использовании метода линейной аппроксимации и выпуклого симплекс-метода [5].

Для решения задачи рассмотрим систему многогранников и линейных функционалов $\left\{D_i, m_i\right\}_I$, задающих $k-$функции системы ограничений $g(x)$.

Каждая часть области допустимых решений D_i является выпуклым многогранником. В силу наложенных ранее условий целевая функция $f(x)$ выпукла и непрерывна на каждом D_i. Таким образом, на каждом D_i мы имеем дело с задачей нелинейного программирования с линейными ограничениями:

$$
\begin{aligned}
& f(x) \to \max \\
& (m_i, x) - b_i \le 0,\ i \in I \\
& x \ge 0,\ x \in D_i
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Алгоритм решения такой задачи начинается с нахождения начального опорного плана на произвольно выбранном множестве D_i с помощью известных методов [Там же]. В результате решения указанной задачи находится опорный план $x^k \in D_k \subset D$.

Далее необходимо осуществить переход к следующему многограннику из $D = \bigcup D_i$. Для этого можно, например, использовать итерационный метод, известный как метод проекции субградиента [1]:

$$x_\alpha^{k+1} = P_M\left(x_k - \alpha_k c_k\right),\ \alpha_k > 0,\ c_k \in \partial f(x_k),\ k = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Здесь α_k - длина шага, c_k и $\partial f(x_k)$ - соответственно субградиент и субдифференциал функции $f(x)$ в точке x_k, P_M - проекция точки $\left(x_k - \alpha_k c_k\right)$ на множество $D = \bigcup D_i$. Субградиент c_k выбирается из $\partial f(x_k)$ произвольным образом. Для выбора величины α_k в градиентных методах существует несколько способов, наиболее распространенные из них рассмотрены в [Там же].

Найденная с помощью (6) точка x_α^{k+1} определяет некоторый многогранник $D_{k+1} : x_\alpha^{k+1} \in D_{k+1}$, для которого снова решается задача (5) и находится последующее решение x^{k+1}. Если при некотором k окажется, что $x^{k+1} = x^k$, то процесс прекращается, а x^k является решением задачи (3).

Докажем сходимость 2 и 3 предложенных алгоритмов решения задачи КЛП.

Для этого предположим, что x^{k+1}, найденное на последнем шаге алгоритма, не является оптимальным решением КЛП, и существует некое решение x^{k^*}, такое что $f(x^{k^*}) > f(x^{k+1})$.

В силу особенностей предложенных алгоритмов ни одно из решений x^k, x^{k-1}, …, найденных на предыдущих итерациях, не может быть более подходящим, чем x^{k+1}, т.е. $f(x^{k,k-1\ldots}) \le f(x^{k+1})$. Следовательно, x^{k^*}, так же как и x^{k+1}, может быть только точкой локального экстремума целевой функции.

Однако, в силу выпуклости целевой функции локальный экстремум является глобальным экстремумом и $f(x^{k^*}) = f(x^{k+1})$, что противоречит неравенству $f(x^{k^*}) > f(x^{k+1})$ и нашему предположению о неоптимальности найденного решения x^{k+1}.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что последовательность точек $\left\{x^k\right\}$, полученных в результате работы алгоритма, сходится к оптимальному решению x^{k+1} и, соответственно, сходимость метода доказана.

Список литературы

1. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
2. **Гаврилова М. О.** О задачах линейного программирования с кусочно-постоянными коэффициентами // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. 2010. С. 172-179.
3. **Гаврилова М. О., Первадчук В. П., Северин М. А.** К задаче о наилучшем использовании ресурсов с переменной матрицей технологических коэффициентов // Шестая международная научно-прикладная конференция: сборник научных трудов. Варна, 2006.
4. **Еремин И. И.** Сигма-кусочные функции и задачи дизъюнктивного программирования // Труды института математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5.
5. **Зангвилл У.** Нелинейное программирование: единый подход. М.: Сов. радио, 1973. 312 с.

УДК 796.92:796.56
Педагогические науки

Александра Ринатовна Гатаулина
Сибирский государственный университет физической культуры и спорта

СТАНДАРТИЗАЦИЯ СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫХ ДИСТАНЦИЙ «СПРИНТ» В СПОРТИВНОМ ОРИЕНТИРОВАНИИ НА ЛЫЖАХ[©]

Актуальность исследования. В настоящее время спорт становится техничным, рациональным, вводятся унифицированные и обязательные меры достижений и их сравнения (стандартное спортивное оборудование, хронометраж, очки и т.п.), разрабатываются наиболее рациональные способы технической подготовки спортсмена и проверки его соответствия должным кондициям. Важная роль в повышении качества результатов подготовки спортсменов и внедрении инновационных технологий в спорте принадлежит стандартизации [9].

Суть лыжного ориентирования - передвижение на лыжах по сетке лыжней разного класса, нанесенных на карту соответствующими знаками, для прохождения дистанций, соответствующих техническому уровню спортсменов каждой группы [10].

Соревнования, проведенные по недостаточно хорошим картам и дистанциям, не способствуют повышению мастерство спортсмена. На этих соревнованиях можно овладеть азами ориентирования и даже достичь уровня первого разряда, если затратить определенные годы. Но мастером международного класса на них не станешь [1].

Работа спортсмена на дистанции во многом зависит от того насколько технически сложна предлагаемая ему соревновательная трасса, что в свою очередь, определяется насыщенностью лыжной сети в районе постановки дистанции [2].

В работах ведущих специалистов по ориентированию [2; 3; 11] хорошо разработаны средства, методы, методики обучения и тренировки спортсменов. Планирование дистанций заданного направления в летнем ориентировании рассматривали А. К. Кивистик (1973), В. М. Алешин (1974), А. А. Ширинян (2008), Е. Е. Жигун (2010), но отсутствуют научно-обоснованные критерии планирования дистанций заданного направления в спортивном ориентировании на лыжах и использовании GPS-устройств (для нанесения сети лыжней).

Проблема исследования: какие стандарты планирования дистанций заданного направления в ориентировании на лыжах необходимы, чтобы соревнования соответствовали должному ранговому уровню.

Цель исследования: разработать и экспериментально обосновать стандарты планирования дистанций «спринт» в спортивном ориентировании на лыжах.

Гипотеза исследования: мы предположили, что применение разработанных стандартов планирования дистанций в заданном направлении в ориентировании на лыжах, влияющих на техническую сложность дистанций, будет способствовать более качественному планированию дистанций, чтобы соответствовать должному уровню соревнований, в спортивном ориентировании на лыжах.

Для достижения поставленной цели и проверки гипотезы были поставлены следующие задачи исследования:

1. Определить критерии соревновательных дистанций заданного направления в ориентировании на лыжах.
2. На основании этих критериев разработать стандарты планирования дистанций заданного направления в лыжном ориентировании.
3. Оценить эффективность разработанных стандартов планирования дистанций заданного направления в ориентировании на лыжах.

Методы исследования: методы теоретического поиска и анализа научно-методической литературы, картографический метод исследования, анализ соревновательных дистанций, методы математической статистики и обобщение экспериментальных данных.

Результаты исследования: сущность соревнования в спортивном ориентировании состоит в возможно более быстром преодолении дистанции, представленной совокупностью контрольных пунктов, установленных на незнакомой местности и нанесенных на спортивную карту [5].
