Майер Роберт Валерьевич

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПЕДВУЗЕ

Проанализированы решения нескольких задач на расчет деформации упругих тел (ферма, стержень, труба) методом конечных элементов, которые можно использовать при изучении основ компьютерного моделирования. Предложены две программы на языке Pascal, в которых случайным образом изменяются координаты узловых точек и определяется форма тела, соответствующая минимальному значению потенциальной энергии. Рассмотрен алгоритм, приведены программы на Pascal и результаты моделирования.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/7/23.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 7 (62). С. 78-80. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/7/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 37.02
Педагогические науки

Проанализированы решения нескольких задач на расчет деформации упругих тел (ферма, стержень, труба) методом конечных элементов, которые можно использовать при изучении основ компьютерного моделирования. Предложены две программы на языке Pascal, в которых случайным образом изменяются координаты узловых точек и определяется форма тела, соответствующая минимальному значению потенциальной энергии. Рассмотрен алгоритм, приведены программы на Pascal и результаты моделирования.

Ключевые слова и фразы: компьютерное моделирование; метод конечных элементов; методика обучения информационным технологиям.

Роберт Валерьевич Майер, д. пед. н., доцент
Кафедра физики и дидактики физики
Глазовский государственный педагогический институт
robert_maier@mail.ru

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПЕДВУЗЕ©

Сущность метода конечных элементов (КЭ) состоит в следующем [1]: конструкция или сплошная среда моделируется путем разбиения ее на конечные элементы (области небольшого размера). После этого формулируют и решают вариационную задачу о нахождении экстремали соответствующего функционала (например, потенциальной энергии). Метод КЭ используется при расчетах конструкций, поля температур, течений жидкости, электромагнитных полей и т.д. [2]. Рассмотрим несколько задач, решаемых методом КЭ, которые могут быть использованы при изучении основ компьютерного моделирования в педагогическом вузе. В них требуется промоделировать плоскую деформацию тела (конструкции), при которой его точки смещаются параллельно плоскости рисунка. В состоянии равновесия система имеет минимальное значение потенциальной энергии. Тело разбивают на стержневые или четырехугольные элементы. Программа содержит процедуру, в которой перебираются все элементы конструкции, и вычисляется суммарная потенциальная энергия U системы. Узлы сетки смещаются на небольшие случайные величины, после чего еще раз рассчитывается потенциальная энергия U_1. Если $U_1 < U$, то эти смещения принимаются, а если нет - отвергаются. Эта процедура повторяется многократно. В результате последовательности итераций определяется искомое состояние системы с наименьшим значением потенциальной энергии.

```
Uses crt, graph; Const N=14; M=2;
Var dl1,dl2,dl3,dl4,dl5,dl6,U,U1,k,c,x1,y1: real;     { PR - 1 }
v,i,j,DV,MV: integer; x,y,a,b: array[-1..N+1] of real;
Function W(i1,i2,i3,i4:integer): real;
begin dl1:=sqrt(sqr(x[i1]-x[i2])+sqr(y[i1]-y[i2]))-10;
dl2:=sqrt(sqr(x[i2]-x[i3])+sqr(y[i2]-y[i3]))-30;
dl3:=sqrt(sqr(x[i3]-x[i4])+sqr(y[i3]-y[i4]))-10;   {Free Pascal}
dl4:=sqrt(sqr(x[i4]-x[i1])+sqr(y[i4]-y[i1]))-30;
dl5:=sqrt(sqr(x[i1]-x[i3])+sqr(y[i1]-y[i3]))-c;
dl6:=sqrt(sqr(x[i2]-x[i4])+sqr(y[i2]-y[i4]))-c;
W:=k*(sqr(dl1)+sqr(dl2)+sqr(dl3)+sqr(dl4)+sqr(dl5)+sqr(dl6));
end;
Procedure Pot_En;
begin U:=W(1,8,7,0)+W(2,9,8,1)+W(3,10,9,2)+W(4,11,10,3)+
W(5,12,11,4)+W(6,13,12,5)+200*(y[13]-5*(y[6]-y[13])); end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi'); Randomize;
For i:=0 to 6 do begin x[i]:=0; y[i]:=30*i; end;
For i:=7 to 13 do begin j:=i-7; x[i]:=10; y[i]:=30*j; end;
k:=400; c:=sqrt(sqr(x[0]-x[8])+sqr(y[0]-y[8]));
Repeat Pot_En; U1:=U;
x1:=x[13]+5*(x[13]-x[6]); y1:=y[13]-5*(y[6]-y[13]);
For i:=0 to N do begin a[i]:=x[i]; b[i]:=y[i];
x[i]:=x[i]+random(100)/1000-0.05;
y[i]:=y[i]+random(100)/1000-0.05; end; y[0]:=0; x[0]:=0;
y[7]:=0; x[7]:=10; If x[1]<0 then x[1]:=0;
If x[3]<0 then x[3]:=0; If x[5]<0 then x[5]:=0;
Pot_En; If U>U1 then begin For i:=0 to 13 do begin
x[i]:=a[i]; y[i]:=b[i]; end; end; inc(v); If v>5000 then v:=0;
If (U<U1)and(v mod 50=0) then begin cleardevice;
For i:=0 to 13 do begin circle(90+round(x[i]*M),
400-round(y[i]*M),2); line(90+round(x[i]*M),400-round(y[i]*M),
90+round(x[i-1]*M),400-round(y[i-1]*M));
end; circle(90+round(x1*M),400-round(y1*M),5); end;
until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

© Майер Р. В., 2012

Задача 1. *Рассчитайте деформацию фермовой конструкции из 5 звеньев, к концу которой подвешен груз.* Для решения этой задачи следует написать программу, в которой перебираются все стержни, вычисляется их удлинение (сжатие) и суммарная потенциальная энергия системы. Рассмотренным выше методом определяется ее состояние, при котором U минимально. Результат решения задачи - на Рис. 1.1.

Задача 2. *В вертикальную стену вмонтирована горизонтальная балка (консольное закрепление). К ее концу привязан трос с грузом m_1, перекинутый через неподвижный блок. К средней части балки подвешен груз m_2. Необходимо рассчитать форму балки в состоянии равновесия.* От реальной конструкции перейдем к конечно-элементной аппроксимации. Сечение балки разобьем на четырехугольные элементы. Потенциальная энергия системы:

$$U = \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{6}(l_i - L_i)^2 = \frac{k}{2}\left[(l_1 - L_1)^2 + (l_2 - L_2)^2 + ... + (l_6 - L_6)^2\right],$$

где L_i, l_i $(i = 1,2,...,6)$ - длины четырех сторон и двух диагоналей четырехугольного элемента в ненапряженном и деформированном состояниях, k - коэффициент жесткости. При этом приближенно считается, что этот конечный элемент эквивалентен четырехугольнику, вершины которого соединены упругими стержнями. В отдельной процедуре рассчитывается суммарная энергия элементов 1-2-13-14, 2-3-12-13, 3-4-11-12 и т.д. К этому значению U прибавляется потенциальная энергия грузов $m_1gh_1 + m_2gh_2$. Результаты моделирования - на Рис. 1.2 и 1.3.

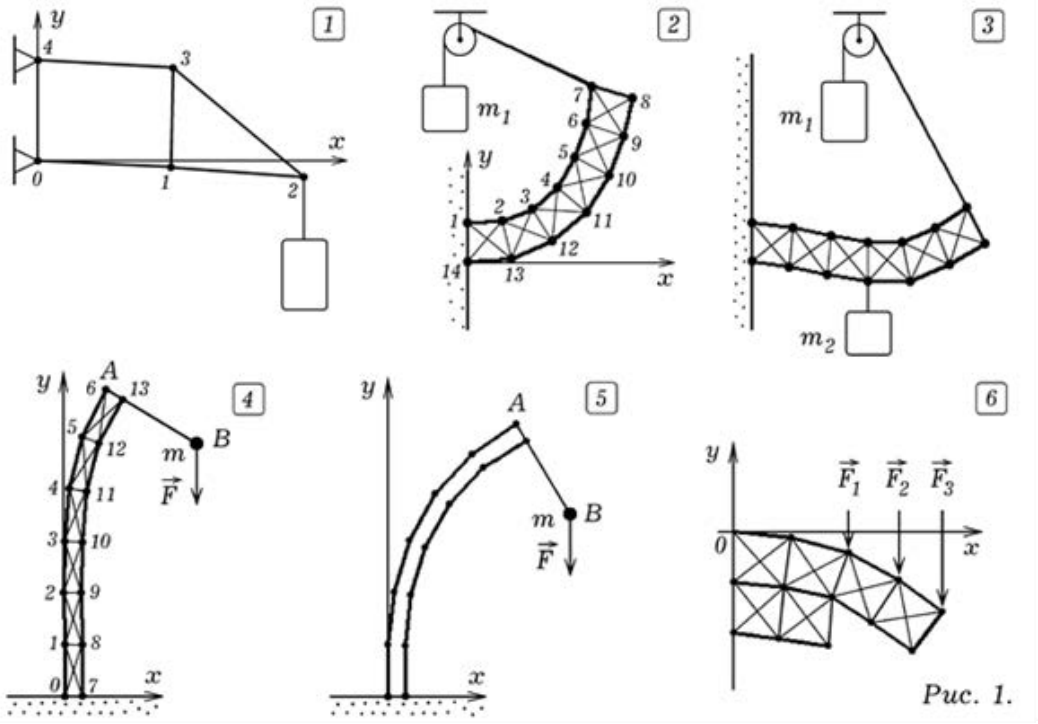

Рис. 1.

Задача 3. *К верхней части упругого вертикального стержня прикреплена горизонтальная жесткая балка AB длиной L, на конце которой расположен груз массы m. Рассчитайте форму стержня.* Пронумеруем вершины, как показано на Рис. 1.4. Используемая программа PR-1 представлена ниже. Координаты вершин четырехугольных элементов сохранены в массивах x[i], y[i]. С помощью функции $W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ вычисляется потенциальная энергия 6 стержней, соответствующих четырехугольнику с вершинами α_i, $i = 1,2,3,4$. В процедуре Pot_En рассчитывается суммарная потенциальная энергия всей системы, включая энергию груза на стержне AB. Результаты - на Рис. 1.5. Аналогично решается следующая задача.

Задача 4. *К консоли переменного сечения приложены силы F_1, F_2 и F_3, направленные вертикально вниз. Необходимо рассчитать форму консоли.* Результат моделирования - на Рис. 1.6.

Задача 5. *Труба прямоугольного сечения из упругого материала сжимается с противоположных сторон. Рассчитайте ее форму при различных нагрузках*. Для решения задачи достаточно рассмотреть деформацию четверти трубы. Разбиение на элементы, нумерация вершин и результаты моделирования представлены на Рис. 2.1 и 2.2. Текст используемой программы PR-2 приведен ниже. Тем же способом рассчитывается форма П-образной пластины, концы которой сжимают (Рис. 2.3).

Задача 6. *Труба круглого сечения из упругого материала сжимается в вертикальном направлении. В горизонтальном направлении она ограничена вертикальными пластинами. Необходимо рассчитать ее форму при различных нагрузках.* Результаты решения - на Рис. 2.4, 2.5 и 2.6.

Другие учебные компьютерные модели рассмотрены в статьях и книгах, размещенных на сайте *http://rmajer.narod.ru* (*komp-model.narod.ru*).

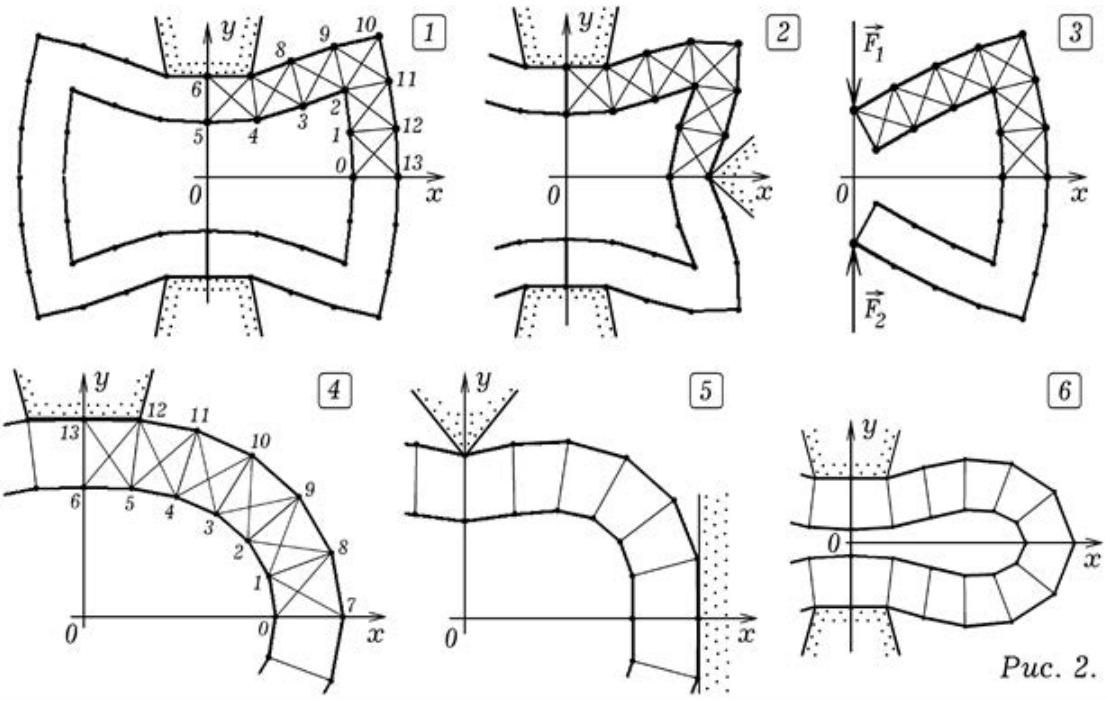

Рис. 2.

```
Uses crt, graph; Const N=13; g=9.8; m=5;                { PR - 2 }
c: array[0..N]of real=(30,30,30,20,10,0,0,10,20,30,40,40,40,40);
d: array[0..N]of real=(0,10,20,20,20,20,30,30,30,30,30,20,10,0);
Var dl1,dl2,dl3,dl4,dl5,dl6,U,U1,k: real; i,DV,MV: integer;
x,y,a,b: array[0..N] of real;                           {Free Pascal}
Function W(i1,i2,i3,i4:integer):real;
begin dl1:=sqrt(sqr(x[i1]-x[i2])+sqr(y[i1]-y[i2]))-10;
dl2:=sqrt(sqr(x[i2]-x[i3])+sqr(y[i2]-y[i3]))-10;
dl3:=sqrt(sqr(x[i3]-x[i4])+sqr(y[i3]-y[i4]))-10;
dl4:=sqrt(sqr(x[i4]-x[i1])+sqr(y[i4]-y[i1]))-10;
dl5:=sqrt(sqr(x[i1]-x[i3])+sqr(y[i1]-y[i3]))-14.1;
dl6:=sqrt(sqr(x[i2]-x[i4])+sqr(y[i2]-y[i4]))-14.1;
W:=k*(2*sqr(dl1)+sqr(dl2)+2*sqr(dl3)+sqr(dl4)+sqr(dl5)+sqr(dl6));
end;
Procedure Pot_En;
begin U:=W(0,1,12,13)+W(1,2,11,12)+W(2,9,10,11)+W(2,3,8,9)+
W(3,4,7,8)+W(4,5,6,7)+40*y[6]{+60*x[13]}; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi'); Randomize;
For i:=0 to N do begin x[i]:=c[i]; y[i]:=d[i]; end; k:=20;
Repeat Pot_En; U1:=U;
For i:=0 to N do begin a[i]:=x[i]; b[i]:=y[i];
x[i]:=x[i]+random(20)/100-0.1; y[i]:=y[i]+random(20)/100-0.1;
end; x[5]:=0; x[6]:=0; y[0]:=0; y[13]:=0;
If y[7]>y[6] then y[7]:=y[6]; Pot_En; If U>U1 then begin
For i:=0 to N do begin x[i]:=a[i]; y[i]:=b[i]; end; end;
If U<U1 then begin cleardevice; For i:=1 to N do begin
circle(20+round(x[i]*M),300-round(y[i]*M),2);
line(20+round(x[i]*M),300-round(y[i]*M),
                        20+round(x[i-1]*M),300-round(y[i-1]*M));
end; end; until KeyPressed; CloseGraph; END.
```

Список литературы

1. **Галагер Р.** Метод конечных элементов: основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
2. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.