

Устинова Людмила Геннадьевна, Ходырева Наталья Геннадиевна

НЕПРЕРЫВНАЯ НИГДЕ НЕ МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ

В статье приводится пример непрерывной функции, определенной в виде суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Обосновывается, что указанная функция не имеет производной ни в одной точке множества действительных чисел. Нестандартным методом доказывается, что рассматриваемая функция не является монотонной на всей числовой прямой.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/7/41.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 7 (62). С. 141-145. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/7/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

приводятся два ротора: внутренний ротор 7 и ротор 11. Относительная скорость изменения магнитного потока, а, следовательно, и создаваемая ЭДС при совместном перемещении роторов относительно друг друга будет всегда выше, чем при вращении только одного из роторов.

Таким образом, проведенные экспериментальные и теоретические исследования показывают, что свойства *выпуклых (встречных) магнитных полей* можно использовать для создания перспективных электрических машин. Более подробные сведения о применении выпуклых магнитных полей можно прочитать в литературе [4].

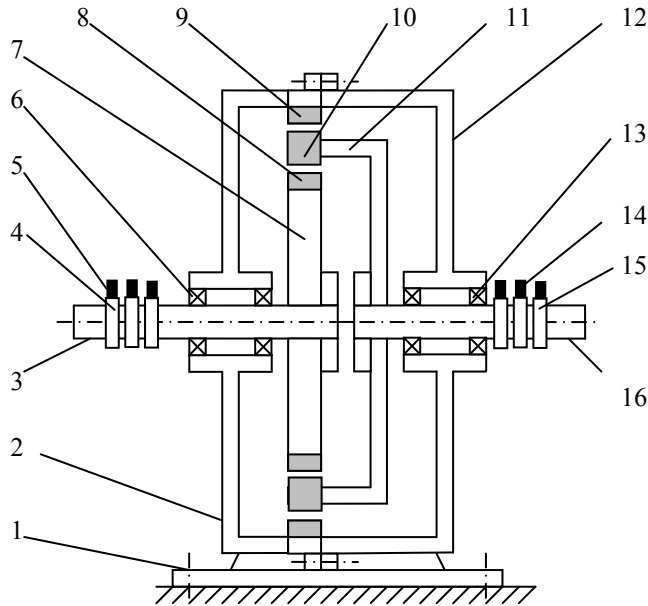


Рис. 4. Конструкция электрической машины с выпуклыми магнитными полями

Список литературы

1. Торшин В. В. Эксперименты с выпуклыми постоянными магнитными полями // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 12 (31). Ч. 1. С. 109-112.
2. Торшин В. В., Круковский Л. Е. Сравнение характеристик электрического генератора при разных видах возбуждения магнитного поля // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 12 (31). Ч. 1. С. 116-120.
3. Торшин В. В., Круковский Л. Е. Эксперименты с генератором постоянного тока при разных схемах возбуждения магнитного поля // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 12 (31). Ч. 1. С. 113-116.
4. Торшин В. В., Пашенко Ф. Ф., Круковский Л. Е. Логическая электродинамика как новый подход к созданию физических эффектов, электрических машин и технических систем. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 352 с.

УДК 517.5

Физико-математические науки

В статье приводится пример непрерывной функции, определенной в виде суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Обосновывается, что указанная функция не имеет производной ни в одной точке множества действительных чисел. Нестандартным методом доказывается, что рассматриваемая функция не является монотонной на всей числовой прямой.

Ключевые слова и фразы: функция; непрерывность функции в точке; производная функции в точке; монотонность; функциональный ряд; равномерная сходимость функционального ряда.

Людмила Геннадьевна Устинова, к. пед. н.

Наталья Геннадиевна Ходырева, к. пед. н.

Кафедра высшей математики

*Национальный исследовательский университет «МЭИ» (филиал) в г. Волжском
ustinovs2007@yandex.ru; hodirevang@mail.ru.*

НЕПРЕРЫВНАЯ НИГДЕ НЕ МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ[©]

Рассмотрим функцию $f_1(x) \equiv |x|$ для $|x| \leq 1/2$ и продолжим ее периодически на всю числовую ось с периодом $T=1$ (Рис. 1):

$$f_1(x+1) = f_1(x)$$

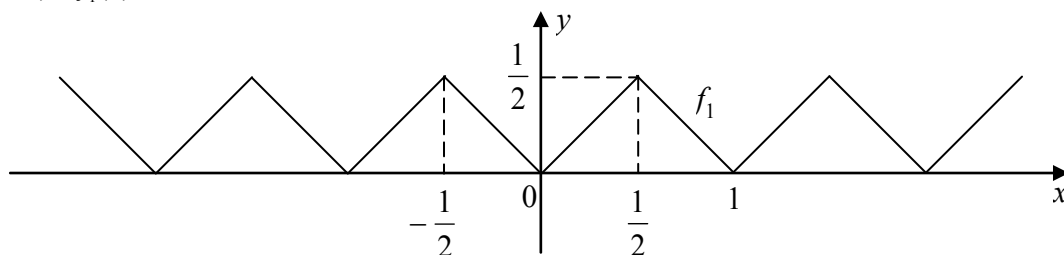


Рис. 1

Заметим, что $0 \leq f_1(x) \leq \frac{1}{2}$ при всех $x \in R$. Кроме того, график функции $f_1(x)$ симметричен относительно любой вертикальной прямой вида $x = \frac{k}{2}$ ($k \in Z$). В точках $x = \frac{k}{2}$ функция $f_1(x)$ не дифференцируема.

Для $n > 1$, где $n \in N$, положим

$$f_n(x) \equiv \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$$

График функции $f_n(x)$ получается из графика функции $f_1(x)$ сжатием в 4^{n-1} раз к оси Ox и в 4^{n-1} раз к оси Oy . Функция $f_n(x)$ периодическая с периодом $\frac{1}{4^{n-1}}$ и максимальным значением $\frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}$, является непрерывной в каждой точке множества действительных чисел и не дифференцируема в точках $x = \frac{k}{2 \cdot 4^{n-1}}$ ($k \in Z$). Заметим, что точки недифференцируемости функций $f_n(x)$ с увеличением n располагаются все гуще и гуще.

На множестве действительных чисел определим функцию

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}} \quad (1)$$

Поскольку члены функционального ряда (1) удовлетворяют на множестве R неравенствам

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где $\frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}$ - члены сходящегося числового ряда, то данный функциональный ряд сходится равномерно на всем рассматриваемом множестве. Так как функции $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны на множестве действительных чисел, то из равномерной сходимости ряда (1) следует непрерывность функции $f(x)$.

Докажем, что функция $f(x)$ не дифференцируема ни в одной точке множества действительных чисел. Для этого воспользуемся методом доказательства «от противного».

Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in R$ существует производная $f'(x_0)$. Зафиксируем положительное целое число k . Тогда найдется целое число s_k , такое что

$$s_k \leq 4^k x_0 < s_k + 1,$$

откуда

$$\frac{s_k}{4^k} \leq x_0 < \frac{s_k + 1}{4^k}.$$

Обозначим $\alpha_k = \frac{s_k}{4^k}$, $\beta_k = \frac{s_k + 1}{4^k}$. Тогда

$$\alpha_k \leq x_0 < \beta_k \quad (2)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = x_0 \quad (3)$$

Из соотношения (2) следует

$$0 < \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - \alpha_k} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{x_0 - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} < 1 \quad (4)$$

Легко проверить следующее тождество:

$$\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} - f'(x_0) = \frac{\beta_k - x_0}{\beta_k - \alpha_k} \left[\frac{f(\beta_k) - f(x_0)}{\beta_k - x_0} - f'(x_0) \right] + \frac{x_0 - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k} \left[\frac{f(x_0) - f(\alpha_k)}{x_0 - \alpha_k} - f'(x_0) \right]$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$ и учитывая соотношения (3) и (4), будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} - f'(x_0) \right] = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = f'(x_0).$$

Покажем теперь, что на самом деле предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ не существует. Из определения функции

$f(x)$ следует

$$\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \frac{f_1(4^{n-1} \cdot \beta_k) - f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \frac{f_1(4^{n-k-1} \cdot (s_k + 1)) - f_1(4^{n-k-1} \cdot s_k)}{\beta_k - \alpha_k}$$

Заметим, что при $n > k$ число $4^{n-k-1} \in Z$, а значит, при таких n

$$f_1(4^{n-k-1} \cdot (s_k + 1)) = 0,$$

$$f_1(4^{n-k-1} \cdot s_k) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{4^{n-1}} \frac{f_1(4^{n-1} \cdot \beta_k) - f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}.$$

При $n \leq k$ имеем

$$\frac{1}{4^{n-1}} \frac{f_1(4^{n-1} \cdot \beta_k) - f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = \frac{f_1\left(\frac{s_k + 1}{4^{k+1-n}}\right) - f_1\left(\frac{s_k}{4^{k+1-n}}\right)}{4^{n-k-1}} \tag{5}$$

Функция f_1 на отрезке $\left[\frac{s_k}{4^{k+1-n}}, \frac{s_k + 1}{4^{k+1-n}}\right]$ является линейной (Рис. 2). Отношение в правой части равенства

(5) представляет собой угловой коэффициент соответствующей прямой, то есть оно равно $+1$ или -1 . Значит,

$$\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k} = p \cdot 1 + q \cdot (-1), \text{ где } p + q = k$$

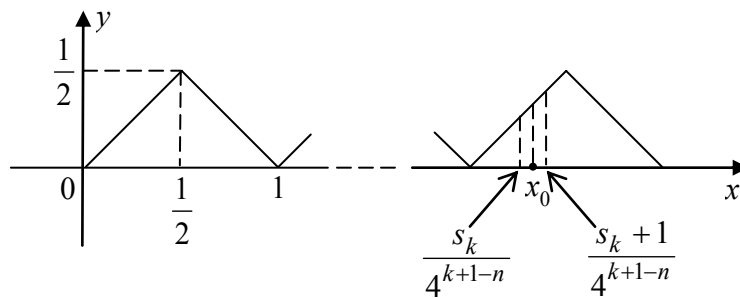


Рис. 2

Заметим, что число $p \cdot 1 + q \cdot (-1)$ имеет ту же четность, что и число $p \cdot 1 + q \cdot (-1 + 2)$, причем $p \cdot 1 + q \cdot (-1 + 2) = p \cdot 1 + q \cdot 1 = k$. Следовательно, отношение $\frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ чётно при чётном k , и нечётно

при нечётном k . Таким образом, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}{\beta_k - \alpha_k}$ не существует, а значит в силу произвольности выбора

точки x_0 функция $f(x)$ не дифференцируема на всей числовой оси.

Докажем, что функция $f(x)$ не монотонна ни в одной точке множества действительных чисел. Стандартный метод здесь не применим. Рассмотрим приращение аргумента $x = \alpha_k$ равное $h_k = \frac{1}{4^{2k+1}}$.

Тогда

$$f(\alpha_k + h_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}[s_k \cdot 4^{-k} + 4^{-2k-1}])}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-(2k+1)-1}[s_k \cdot 4^{k+1} + 1])}{4^{n-1}}.$$

Заметим, что при $n > (2k+1)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$, имеем $4^{n-(2k+1)-1}[s_k \cdot 4^{k+1} + 1] \in \mathbb{Z}$, а значит, при таких n

$$f_1(4^{n-(2k+1)-1}[s_k \cdot 4^{k+1} + 1]) = 0.$$

Следовательно,

$$f(\alpha_k + h_k) = \sum_{n=1}^{2k+1} \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}}.$$

Выше было показано, что

$$f(\alpha_k) = \sum_{n=1}^k \frac{f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k)}{4^{n-1}}.$$

Найдем приращение функции, соответствующее приращению h_k :

$$\begin{aligned} f(\alpha_k + h_k) - f(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^{2k+1} \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}} - \sum_{n=1}^k \frac{f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k)}{4^{n-1}} = \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k]) - f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k)}{4^{n-1}} + \sum_{n=k+1}^{2k+1} \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k]) - f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k) &= f_1(4^{n-1}[s_k \cdot 4^{-k} + 4^{-2k-1}]) - f_1(4^{n-1} \cdot s_k \cdot 4^{-k}) = \\ &= f_1(s_k \cdot 4^{n-k-1} + 4^{n-2k-2}) - f_1(s_k \cdot 4^{n-k-1}) = f_1\left(\frac{s_k}{4^{k+1-n}} + \frac{1}{4^{2k+2-n}}\right) - f_1\left(\frac{s_k}{4^{k+1-n}}\right). \end{aligned}$$

Функция f_1 на отрезке $\left[\frac{s_k}{4^{k+1-n}} + \frac{1}{4^{2k+2-n}}; \frac{s_k}{4^{k+1-n}}\right]$ является линейной (Рис. 3). Поэтому приращение функции, соответствующее приращению аргумента 4^{n-2k-2} будет равно

$$f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k]) - f_1(4^{n-1} \cdot \alpha_k) = \pm 4^{n-2k-2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha_k + h_k) - f(\alpha_k) &= \sum_{n=1}^k \frac{\pm 4^{n-2k-2}}{4^{n-1}} + \sum_{n=k+1}^{2k+1} \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}} = \\ &= \pm \sum_{n=1}^k 4^{-2k-1} + \sum_{n=k+1}^{2k+1} \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}} = \pm kh_k + \sum_{n=k+1}^{2k+1} \frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}}. \end{aligned}$$

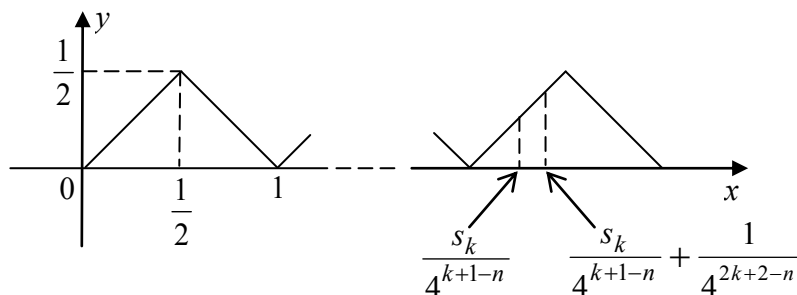


Рис. 3

Найдем $\frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}}$, при $n = k + p$, где $p = 1, 2, \dots, k+1$.

$$\frac{f_1(4^{n-1}[\alpha_k + h_k])}{4^{n-1}} = \frac{f_1(4^{k+p-1}(s_k \cdot 4^{-k} + 4^{-2k-1}))}{4^{k+p-1}} = \frac{f_1(s_k \cdot 4^{p-1} + 4^{-k+p-2})}{4^{k+p-1}} = \frac{f_1(4^{-k+p-2})}{4^{k+p-1}} = \frac{4^{-k+p-2}}{4^{k+p-1}} = h_k.$$

Таким образом,

$$f(\alpha_k + h_k) - f(\alpha_k) \geq -kh_k + (k+1)h_k = h_k > 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$f(\alpha_k - h_k) - f(\alpha_k) \geq -kh_k + (k+1)h_k = h_k > 0.$$

Но так как точки вида $\alpha_k = \frac{S_k}{4^k}$ всюду плотны в R , то, следовательно, не существует интервала, на котором функция $f(x)$ монотонна.

Список литературы

1. Гелбаум Б., Олмстед Д. Контрпримеры в анализе. М.: Издательство ЛКИ, 2007. 256 с.
2. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976. 320 с.

УДК 561.232:582.26/27+502.51(285)(571.13)

Биологические науки

В статье впервые приводятся сведения о цианобактериях и водорослях озера Жалтырь Омской области - одного из типичных для лесостепной зоны Западной Сибири бессточных водоемов. Рассмотрены данные физико-химических анализов воды, указаны таксономический спектр изучавшихся организмов, видовой состав цианобактерий и водорослей планктона и бентоса, выделены различные бентосные сообщества. Определены степень загрязнения водоема и солёность его воды.

Ключевые слова и фразы: озеро; физико-химические показатели воды; цианобактерии; водоросли; планктон; бентос.

Владимир Григорьевич Федоров, к. биол. н., доцент

Кафедра биологии

Омская государственная медицинская академия

kafbioogma@mail.ru

ЦИАНОБАКТЕРИИ И ВОДРОСЛИ ОЗЕРА ЖАЛТЫРЬ ОМСКОЙ ОБЛАСТИ[©]

Омская область находится на юге Западно-Сибирской низменности, на берегах одной из крупнейших рек этой местности - Иртыша. Здесь проживают более двух миллионов человек, развиты промышленность и сельское хозяйство.

Территория области богата естественными водоемами, в том числе озерами различной величины и характера, которых насчитывается около двух тысяч. Многие озера интенсивно используются населением для водопоя скота, купания и других хозяйственно-бытовых нужд. В связи с этим важное значение имеет определение видового состава и структуры фитопланктона и фитобентоса как показателей, позволяющих установить экологическое и санитарное состояние водных объектов. Такая работа по изучению альгофлоры озер проводится в Омской области уже ряд лет, однако обследовано до настоящего времени лишь небольшое число озер [1-14]; кроме того, исследовалась обычно не вся альгофлора водоемов в целом, а только либо планктон, либо бентос.

Мы в конце августа 1956 г. и начале ноября 1957 г. обследовали озеро Жалтырь, расположенное в Шербакульском районе (90 км юго-западнее гор. Омска) и представляющее собой типичный для лесостепной зоны Западной Сибири постепенно заболачивающийся бессточный водоем. Лежит оно на открытой местности, окружено лугами и посевами зерновых культур. Рядом с озером проходит автомобильная дорога.

Длина озера - 2 км, ширина - 1,2 км, максимальная глубина - 2,5 м. Оно сильно заросло тростником (*Phragmites communis* Trin.). Имеются обширные подводные луга, образованные *Ceratophyllum demersum* L. и *Potamogeton pectinatus* L. Реже наблюдаются *Typha latifolia* L., *Butomus umbellatus* L., *Myriophyllum spicatum* L., *Potamogeton* sp., осоки (*Carex* sp. sp.), а также вегетирующие в сравнительно небольшом количестве ряски - *Lemna minor* L. и *L. trisulca* L. По илистым берегам встречаются *Equisetum palustre* L. и *E. limosum* L.

Берега водоема низкие, топкие. Донные отложения представлены желтым и черным илом, последний нередко имеет запах сероводорода. Питание озера осуществляется за счет атмосферных вод.

Используется озеро в основном для водопоя скота, загоняемого прямо в водоем, рыбной ловли и водоснабжения временных полевых станций. Изредка вода применяется для питья.

Вследствие небольшой глубины озеро в летнее время хорошо прогревается, и даже в конце августа температура воды достигает 22°C. Физико-химические анализы воды дали следующие результаты (Табл. 1).

Как видно из данных таблицы, вода озера в момент отбора образцов отличалась довольно высокой прозрачностью. Цвет воды был желтовато-зеленоватый, особенно резко заметный в ноябре 1957 г. Азотистые соединения содержались в умеренных количествах. Вкус воды солоноватый, концентрация хлоридов велика. Сульфатов и железа немного. Жесткость (карбонатная и общая) и окисляемость воды весьма высоки.