

Хачунц Дианна Самвеловна

ДВУМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ

Работа посвящена построению двумерной математической модели движения воздушной среды. Для адекватного математического описания процессов, происходящих в атмосфере, требуется решить проблему построения ее физической модели, поскольку она существенным образом влияет на построение поля ветра и на описание переноса, происходящего в воздушной среде. В работе представлены аппроксимация задачи по временной переменной, двумерная модель аэродинамики и приведены результаты численных экспериментов.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/1/46.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2013. № 1 (68). С. 151-154. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

6. Сухинов А. И., Чистяков А. Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. С. 290-297.
7. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 3-21.
8. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 159-167.
9. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 32-44.
10. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Тимофеева Е. Ф., Шишня А. В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 8. С. 32-44.
11. Фоменко Н. А. Моделирование гидродинамических процессов при обтекании корпуса судна // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 139-147.

УДК 519.86

Физико-математические науки

Работа посвящена построению двумерной математической модели движения воздушной среды. Для адекватного математического описания процессов, происходящих в атмосфере, требуется решить проблему построения ее физической модели, поскольку она существенным образом влияет на построение поля ветра и на описание переноса, происходящего в воздушной среде. В работе представлены аппроксимация задачи по временной переменной, двумерная модель аэродинамики и приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова и фразы: воздушная среда; двумерная математическая модель; аппроксимация; аэродинамика.

Дианна Самвеловна Хачунц

Кафедра высшей математики

Южный федеральный университет

diana-hachunts@mail.ru

ДВУМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ[©]

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (грант № 14.А18.21.0680).

Введение. В общем перечне актуальных задач, решаемых с помощью математического моделирования, состояние воздушной среды занимает особое место. Естественным средством объективного анализа возникающих проблем являются методы, основанные на построении и совместном изучении математических моделей природных систем. Использование математического моделирования и проведение вычислительного эксперимента позволяют оценить все аспекты реализации проектов, связанных с воздействием на природную среду. Одним из наиболее значимых исследований методов климата и динамики атмосферы является проведение численных экспериментов. Современные численные методы позволяют осуществить моделирование объектов, поведение которых описывается весьма сложными системами дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Основными уравнениями динамики воздушной среды являются [1-3; 8; 12; 15-16]:

- система уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y \\ v'_t + uv'_x + vv'_y &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y; \end{aligned} \quad (1)$$

- уравнение неразрывности

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y = 0; \quad (2)$$

- уравнение состояния

$$P = \frac{\rho}{M} RT. \quad (3)$$

Система уравнений (1)-(2) рассматривается при следующих граничных условиях:

- на непроницаемой границе: $\rho_v \eta u'_n = \tau_{x,b}(t)$, $\rho_v \eta v'_n = \tau_{y,b}(t)$, $\bar{V}'_n = 0$, $P'_n = 0$;

- на боковых проницаемых границах: $u'_n = 0$, $v'_n = 0$, $P'_n = 0$;

- на источнике: $u = U$, $v = V$, $P'_n = 0$,

где $\bar{V} = \{u, v\}$ - значение компонент вектора скорости, P - давление, ρ - плотность, μ - коэффициент турбулентного обмена, M - молярная масса, τ_x, τ_y - составляющие тангенциального напряжения, T - температура, R - универсальная газовая постоянная, U, V - компоненты вектора скорости на источнике.

2. Аппроксимация задачи по временной переменной. Согласно методу поправки к давлению исходная модель гидродинамики (1)-(2) разбивается на три подзадачи. Первая подзадача представлена уравнением диффузии-конвекции-реакции, на основе которого вычисляется компоненты поля скорости на промежуточном временном слое

$$\frac{\tilde{u}-u}{h_t} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y = (\mu\tilde{u}'_x)' + (\mu\tilde{u}'_y)', \quad \frac{\tilde{v}-v}{h_t} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y = (\mu\tilde{v}'_x)' + (\mu\tilde{v}'_y)' \quad (5)$$

Для аппроксимации по временной переменной уравнения диффузии-конвекции-реакции использованы схемы с весами. Здесь $\bar{u} = \sigma\tilde{u} + (1-\sigma)u$, $\sigma \in [0, 1]$ - вес схемы.

Система уравнений (5) рассматривается при следующих граничных условиях:

- на непроницаемой границе: $\rho_y \eta u'_n = \tau_{x,b}(t)$, $\rho_y \eta v'_n = \tau_{y,b}(t)$;

- на боковых проницаемых границах: $u'_n = 0$, $v'_n = 0$;

- на источнике: $u = U$, $v = V$, $P'_n = 0$.

Уравнение для расчета распределения давлений можно записать в следующем виде:

$$\frac{\hat{P}-P}{h_t} + (\bar{P}\hat{u})'_x + (\bar{P}\hat{v})'_y = kh_t(\bar{P}''_{xx} + \bar{P}''_{yy}), \quad (6)$$

где $k = RT/M$.

Третья подзадача позволяет по явным формулам определить распределение скоростей на верхнем временном слое

$$\bar{P} \frac{\hat{u}-\tilde{u}}{h_t} = -k\bar{P}_x, \quad \bar{P} \frac{\hat{v}-\tilde{v}}{h_t} = -k\bar{P}_y, \quad (7)$$

где τ - шаг по временной координате, u - значение поля скорости на предыдущем временном слое, \tilde{u} - значение поля скорости на промежуточном временном слое, \hat{u} - на текущем временном слое.

3. Построение двумерной модели аэродинамики. Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\omega_t = \{t^n = nh_t, 0 \leq n \leq N_t - 1, l_t = h_t(N_t - 1)\}$$

$$\omega_x = \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, l_x = h_x(N_x - 1)\}$$

$$\omega_y = \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, l_y = h_y(N_y - 1)\},$$

где n, i, j - индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; h_t, h_x, h_y - шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; N_t, N_x, N_y - количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; l_t, l_x, l_y - длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса, полученные при помощи интегро-интерполяционного метода, в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны в следующем виде:

$$(q_0)_{i,j} uc'_x = (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}$$

$$(q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x = (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - \left| (q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j} \right| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},$$

где q_0, q_1, q_2 - коэффициенты заполненности контрольных областей [5; 9-11; 13].

Аппроксимация первого уравнения системы (5) имеет вид:

$$(q_0)_{i,j} \frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}}{h_t} + (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{2h_x} +$$

$$+ (q_3)_{i,j} u_{i,j+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{2h_y} + (q_4)_{i,j} u_{i,j-1/2} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j-1}}{2h_y} = (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{h_x^2} -$$

$$- (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{h_x^2} + (q_3)_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j-1}}{h_y^2} + \left((q_3)_{i,j} - (q_4)_{i,j} \right) \frac{\tau_x}{\rho h_y} (m_1)_{i,j},$$

где $\bar{c} = \sigma\hat{c} + (1-\sigma)c$, $\sigma \in [0, 1]$ - вес схемы [9].

Параметр m_1 принимает значение 1 в случае, если узел (i, j) принадлежит множеству граничных узлов, находящихся в придонной области, в противном случае $m_1 = 0$. Аппроксимация второго слагаемого уравнения системы (5) запишется аналогичным образом.

Аппроксимация уравнения (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} (q_0)_{i,j} \frac{\hat{P}_{i,j} - P_{i,j}}{h_t} + (q_1)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{u})_{i+1,j} - (\bar{P}\tilde{u})_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{u})_{i,j} - (\bar{P}\tilde{u})_{i-1,j}}{2h_x} + \\ + (q_3)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{v})_{i,j+1} - (\bar{P}\tilde{v})_{i,j}}{2h_y} + (q_4)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{v})_{i,j} - (\bar{P}\tilde{v})_{i,j-1}}{2h_y} = (q_1)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i+1,j} - \bar{P}_{i,j}}{h_x^2} - \\ - (q_2)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i-1,j}}{h_x^2} + (q_3)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i,j+1} - \bar{P}_{i,j}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i,j-1}}{h_y^2} + \\ + ((q_2)_{i,j} - (q_1)_{i,j}) \frac{\tilde{u}_{i,j} - U_{i,j}}{h_x} \bar{P}_{i,j} (m_2)_{i,j} + ((q_4)_{i,j} - (q_3)_{i,j}) \frac{\tilde{v}_{i,j} - V_{i,j}}{h_y} \bar{P}_{i,j} (m_2)_{i,j} \end{aligned} \quad (9)$$

Параметр $m_2 = 1$ в случае, если узел (i, j) принадлежит входной границе, в противном случае $m_2 = 0$.

Аппроксимация первого уравнения системы (9) примет вид:

$$(q_0)_{i,j} \bar{P}_{i,j} \frac{\hat{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}}{h_t} = -k(q_1)_{i,j} \frac{\bar{P}_{i+1,j} - \bar{P}_{i,j}}{2h_x} - k(q_2)_{i,j} \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i-1,j}}{2h_x} \quad (10)$$

Для решения сеточных уравнений используем адаптивный попеременно-треугольный итерационный метод [6-8; 14].

4. Результаты численных экспериментов. На Рис. 1-3 приведены результаты численных экспериментов по моделированию движения воздушной среды при обтекании твердых тел. Палитрой показана интенсивность скорости движения воздушной среды.

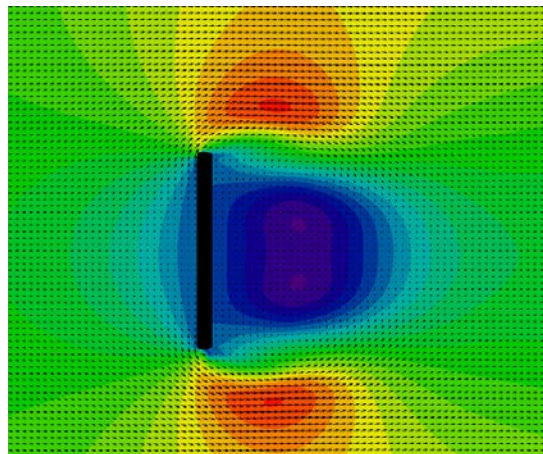


Рис. 1. Распределение поля скоростей при обтекании пластины

Пластина, помещенная в поток под углом 90° , создает довольно резкое изменение направления движения потока, а именно торможение потока перед пластиной, поджатие струек у ее краев и образование за краем пластины больших вихрей, которые заполняют всю область за ней.

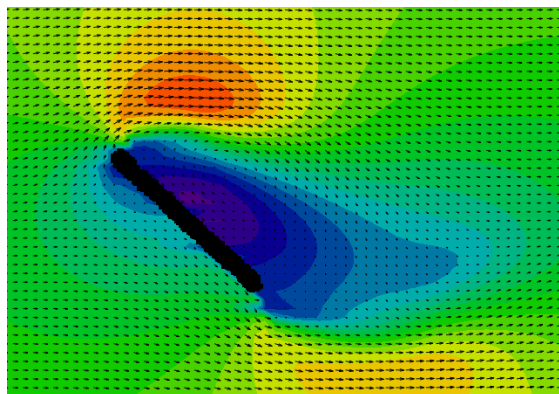


Рис. 2. Распределение поля скоростей при обтекании пластины

При обтекании шара зона вихрей будет существенно меньше, так как воздуху ‘проще’ обтекать закругленные поверхности.

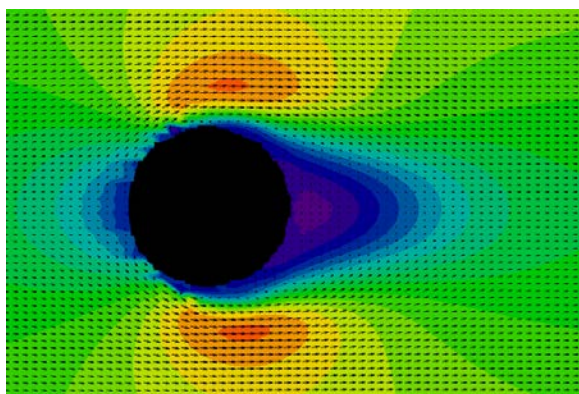


Рис. 3. *Распределение поля скоростей при обтекании шара*

Приведенные численные эксперименты показывают работоспособность разработанного комплекса программ. Построенные картины течений согласуются с реальными аэродинамическими процессами.

Вывод. В работе разработана двумерная математическая модель движения воздушной среды, приведены результаты численных экспериментов по моделированию движения воздушной среды. Построены картины течений при обтекании воздушной средой объектов сложной геометрической формы. Разработанный комплекс программ может быть использован при моделировании распространения загрязняющих веществ в воздушной среде. В работе также показана эффективность методики построения дискретных математических моделей, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек, при решении задач аэродинамики. Стоит также отметить, что разработанный программный комплекс допускает внедрение в него новых программных блоков, на основе которых происходит описание процессов, происходящих внутри движущейся воздушной среды.

Список литературы

1. Алексеев Е. В., Сидоренко Б. В., Колгунова О. В., Чистяков А. Е. Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 6-18.
2. Алюян А. Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере: курс лекций. М.: ИВМ РАН, 2002. 201 с.
3. Володин Е. М. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы: курс лекций. М.: ИВМ РАН, 2007. 87 с.
4. Дегтярева Е. Е., Чистяков А. Е. Моделирование транспорта наночастиц по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 2 (127). С. 112-118.
5. Сухинов А. И., Тимофеева Е. Ф., Чистяков А. Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 22-32.
6. Сухинов А. И., Чистяков А. Е. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 1. С. 3-21.
7. Сухинов А. И., Чистяков А. Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. С. 290-297.
8. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеев Е. В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 3. С. 3-21.
9. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Бондаренко Ю. С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 6-13.
10. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 159-167.
11. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наночастиц // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 32-44.
12. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Хачунц Д. С. Математическое моделирование движения многокомпонентной воздушной среды и транспорта загрязняющих веществ // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8 (121). С. 73-79.
13. Чистяков А. Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 66-77.
14. Чистяков А. Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 237-249.
15. Чистяков А. Е. Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8 (97). С. 75-82.
16. Чистяков А. Е., Алексеев Е. В., Колгунова О. В. Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах // Известия ЮФУ. Технические науки. 2008. № 10 (87). С. 171-175.