представлено на Рис. 4*б* в виде четырех горизонтальных планов, расположенных на разных по вертикали этажах. Положение изолиний, обозначающих содержание меди в руде, показывает на планах ее объемное распределение по выделенной части рудного блока. Кроме того, по заданному бортовому содержанию меди 0,6% оценено граничное положение в геопространстве кондиционной части рудной залежи. Границы кондиционной руды показаны пунктиром.

Заключение. Уравнения нелинейной регрессии, построенные с учетом действующих на нее факторов и оптимизированные по параметрам соответствующих факторных функций, обладают повышенной достоверностью отображения свойств и характеристик исследуемых объектов и процессов. Алгоритм оптимизации уравнений нелинейной регрессии в последовательно чередующихся сечениях целевой функции коэффициента детерминации по методу МППВ приводит к устойчивой сходимости расчета параметров факторных функций разной мерности. Практическое применение методологии формирования и построения уравнений функционально-факторной нелинейной регрессии, в том числе рассчитанных по программе «Тренды ФСП-1», обеспечивает высокую эффективность интерпретации количественных результатов экспериментальных горно-технологических исследований.

Список литературы

1. **Антонов В. А.** Об одном методе построения полиномных трендов с самоопределяющимися показателями и коэффициентами // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46. № 2. С. 78-88.
2. **Антонов В. А., Яковлев М. В.** Уравнения нелинейной регрессии, тренды двумерные функционально-факторные с самоопределяющимися параметрами и повышенной достоверностью (Тренды ФСП-1): программа для ЭВМ, РФ; регистр. номер 2011616230. Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2011.

УДК 539.374
Физико-математические науки

В статье исследуется предельное состояние анизотропного слоя из идеальнопластического материала, сжатого параллельными жесткими плитами. Полученные результаты позволяют учитывать влияние трансляционной анизотропии на прессовку пространственной металлической заготовки жесткими плитами. Важным и актуальным является учет влияния трансляционной анизотропии на напряженно-деформированное состояние тел.

Ключевые слова и фразы: сжатие; слой; идеальная пластичность; трансляционная анизотропия; деформация.

Балашникова Анжелика Вениаминовна
Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
Info3006@yandex.ru

СЖАТИЕ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА-ХИЛЛА©

Рассмотрим сжатие идеальнопластического слоя параллельными жесткими шероховатыми плитами при условии пластичности Мизеса.

Запишем уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.$$

Условие пластичности запишем в виде

$$A\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+B\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+C\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left[D\tau_{xy}{}^2+F\tau_{yz}{}^2+E\tau_{xz}{}^2\right]=6k_0^2, \qquad (2)$$

где $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{xz}$ – компоненты напряжения, $A,B,C,D,F,E,k_0-const$, определяющие предел текучести и параметры анизотропии.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, все величины, имеющие размерность напряжений, отнесем к величине предела текучести k_0 и сохраним обозначения напряжений σ_{ij}.

Условие пластичности (2) примет вид

$$A\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+B\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+C\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left[D\tau_{xy}{}^2+F\tau_{yz}{}^2+E\tau_{xz}{}^2\right]=6. \tag{3}$$

Соотношения связи между напряжениями и скоростями деформаций, согласно ассоциированному закону течения, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x=2\lambda\cdot\left(A\left(\sigma_x-\sigma_y\right)-C\left(\sigma_z-\sigma_x\right)\right),\\
&\varepsilon_y=2\lambda\cdot\left(-A\left(\sigma_x-\sigma_y\right)+B\left(\sigma_y-\sigma_z\right)\right),\\
&\varepsilon_z=2\lambda\cdot\left(-B\left(\sigma_y-\sigma_z\right)+C\left(\sigma_z-\sigma_x\right)\right),\\
&\varepsilon_{xy}=6\lambda\cdot D\tau_{xy},\\
&\varepsilon_{yz}=6\lambda\cdot F\tau_{yz},\\
&\varepsilon_{xz}=6\lambda\cdot E\tau_{xz},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\varepsilon_{xy},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{xz}$ – компоненты скорости деформации.

Из (4) следует условие несжимаемости

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0. \tag{5}$$

Используя условие несжимаемости (5), из (4) выразим:

$$\left(\sigma_z-\sigma_x\right)=-\left(\sigma_x-\sigma_y\right)-\left(\sigma_y-\sigma_z\right). \tag{6}$$

Подставляя полученное выражение (6) в ассоциированный закон течения (4), найдем

$$\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_x}{2\lambda}=\left(A+C\right)\left(\sigma_x-\sigma_y\right)+C\left(\sigma_y-\sigma_z\right),\\ \dfrac{\varepsilon_y}{2\lambda}=-A\left(\sigma_x-\sigma_y\right)+B\left(\sigma_y-\sigma_z\right).\end{cases} \tag{7}$$

Определитель данной системы (7) равен

$$\Delta=\begin{vmatrix}A+C & C\\ -A & B\end{vmatrix}=AB+BC+AC.$$

Найдем решения системы (7):

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_x-\sigma_y\right)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{B\varepsilon_x-C\varepsilon_y}{2\lambda\Delta},\\
&\left(\sigma_y-\sigma_z\right)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{A\varepsilon_x+\left(A+C\right)\varepsilon_y}{2\lambda\Delta},\\
&\left(\sigma_z-\sigma_x\right)=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-\frac{\left(A+B\right)\varepsilon_x+A\varepsilon_y}{2\lambda\Delta},\\
&\tau_{xy}=\frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda\Delta},\tau_{yz}=\frac{\varepsilon_{yz}}{6\lambda\Delta},\tau_{xz}=\frac{\varepsilon_{xz}}{6\lambda\Delta}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Полученное решение подставим в уравнение пластичности (2) и выразим λ :

$$6\lambda=\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{3}{2}\left[A\left(B\varepsilon_x-C\varepsilon_y\right)^2+B\left(A\varepsilon_x+\left(A+C\right)\varepsilon_y\right)^2+C\left(\left(A+B\right)\varepsilon_x+A\varepsilon_y\right)^2\right]+D\varepsilon_{xy}^2+F\varepsilon_{yz}^2+E\varepsilon_{xz}^2}. \tag{9}$$

Имеют место формулы Коши:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{10}$$

где u , v , w – скорости перемещения.

Имеем

$$\sigma=\frac{1}{3}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)=\sigma_x+\frac{1}{3}\left(\left(\sigma_y-\sigma_x\right)+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)\right). \tag{11}$$

Используя (11), из (4) выразим напряжения через компоненты скорости деформации:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=\sigma+\frac{1}{6\lambda\Delta}\left(\left(A+2B\right)\varepsilon_x+\left(A-C\right)\varepsilon_y\right),\\
&\sigma_y=\sigma+\frac{1}{6\lambda\Delta}\left(\left(A-B\right)\varepsilon_x+\left(A+2C\right)\varepsilon_y\right),\\
&\sigma_z=\sigma+\frac{1}{6\lambda\Delta}\left(-\left(2A+B\right)\varepsilon_x-\left(2A+C\right)\varepsilon_y\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Предположим, что все компоненты девиаторов напряжений и скорости деформации ε_{ij} зависят только от z:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}(z). \tag{13}$$

Положим аналогично Прандтлю:

$$\tau_{xz} = az, \tau_{yz} = bz, \tag{14}$$

где $a, b - const$.

Из (4), (14) следует

$$\varepsilon_{xz} \cdot Fb = \varepsilon_{yz} \cdot Ea. \tag{15}$$

Согласно принятым предположениям, уравнения равновесия (1) примут вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + a = 0, \frac{\partial\sigma}{\partial y} + b = 0, \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0, \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-(2A+B)\varepsilon_x - (2A+C)\varepsilon_y}{6\lambda\Delta}\right) = 0. \tag{16}$$

Из (16) находим

$$\sigma_z = -ax - by + C, \sigma = -ax - by + C + \frac{(2A+B)\varepsilon_x + (2A+C)\varepsilon_y}{6\lambda\Delta}, C - const. \tag{17}$$

Условие несжимаемости (5), согласно (10), имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{18}$$

Положим

$$\begin{gathered} u = m_1 x + n_1 y + \phi_1(z), \\ v = m_2 x + n_2 y + \phi_2(z), \\ w = m_3 x + n_3 y + qz, \end{gathered} \tag{19}$$

где $m_i, n_i, q - const$.

Согласно (10), (18) формулы Коши перепишем, учитывая предположение (14), получим

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = m_1, \varepsilon_y = n_2, \varepsilon_z = q, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\cdot(n_1 + m_2), \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\cdot\left(n_3 + \frac{d\phi_2}{dz}\right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\cdot\left(m_3 + \frac{d\phi_1}{dz}\right), m_1 + n_2 + q = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Для нахождения λ в соотношение (9) подставим полученные формулы Коши (20) и найдем:

$$\lambda = \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{3}{2}\left[A(Bm_1 - Cn_2)^2 + B(Am_1 + (A+C)n_2)^2 + C((A+B)m_1 + An_2)^2\right] + D\varepsilon_{xy}^2 + F\varepsilon_{yz}^2 + E\varepsilon_{xz}^2}. \tag{21}$$

Согласно (12), (15), (17), (20) получим

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma_z + \frac{3}{6\lambda\Delta}\left[(A+B)\varepsilon_x + A\varepsilon_y\right] = -ax - by + C + \frac{3}{6\lambda\Delta}\left[(A+B)m_1 + An_2\right], \\ \sigma_y = \sigma_z + \frac{3}{6\lambda\Delta}\left[A\varepsilon_x + (A+C)\varepsilon_y\right] = -ax - by + C + \frac{3}{6\lambda\Delta}\left[Am_1 + (A+C)n_2\right], \\ \tau_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{6\lambda\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n_1 + m_2}{6\lambda\Delta}, \\ (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{3}{6\lambda\Delta}\left[Bm_1 - Cn_2\right], (\sigma_y - \sigma_z) = \frac{3}{6\lambda\Delta}\left[Am_1 + (A+C)n_2\right], \\ (\sigma_z - \sigma_x) = -\frac{3}{6\lambda\Delta}\left[(A+B)m_1 + An_2\right]. \end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, решена задача о сжатии анизотропного пространственного идеальнопластического слоя при обобщении условия пластичности Мизеса-Хилла. Получили, что и для обобщенного условия пластичности Мизеса-Хилла при трансляционной анизотропии могут быть найдены компоненты скоростей деформации и напряжений.

Список литературы

1. **Балашникова А. В.** О сжатии пространственного идеальнопластического слоя при трансляционной анизотропии при обобщении условия пластичности Мизеса // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 1 (11). С. 56-59.