Сойкин Борис Михайлович, Георгиев Александр Анатольевич

**НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ УПРУГО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ**

Статья содержит результаты теоретических исследований в области механики упруго-деформируемых систем. Приводятся нетрадиционные приемы решения и анализа дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка. Составлена таблица формул, рекомендуемых для практического использования.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2013/5/51.html

**Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.**

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2013. № 5 (72). С. 160-164. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2013/5/

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 621.941
**Технические науки**

*Статья содержит результаты теоретических исследований в области механики упруго-деформируемых систем. Приводятся нетрадиционные приемы решения и анализа дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка. Составлена таблица формул, рекомендуемых для практического использования.*

*Ключевые слова и фразы:* механическая обработка; дифференциальные уравнения; теорема разложения; интегральные преобразования.

**Сойкин Борис Михайлович**, д.т.н., профессор
**Георгиев Александр Анатольевич**
*Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д. Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург*
*bomsoy@yandex.ru*

# НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ УПРУГО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ©

Технологический процесс механической обработки конструкционных материалов сопровождается непрерывной деформацией и разрушением поверхностных слоев обрабатываемой заготовки. Деформация и разрушение твердых тел наблюдаются и при эксплуатации готовых объектов современной техники. И в этом отношении большой научный и практический интерес приобретают вопросы изучения закономерностей поведения изделий под действием внешней разрушающей нагрузки.

По данным американских исследователей, решение вопросов прочности, надежности и долговечности поведения конструкций под нагрузкой имеет не только научно-практическое, но и большое экономическое значение. В работе [1] показано, что затраты на предотвращение разрушений и стоимость аварий вследствие разрушений конструкций составляют для промышленности США около 120 млрд долларов в год. Научные разработки в области механики разрушений и применение их результатов могут существенно (примерно на 30%) влиять на экономическую эффективность техники. Тем не менее, в практических расчетах машин на прочность и ресурс работы, как у нас, так и за рубежом, используют, как правило, эксперимент и прежний опыт, обобщаемые в различных банках данных. Объясняется это, в основном, недостатками теоретических построений в механике деформации и разрушения.

Основные научные разработки в нашей стране традиционно велись по пути концептуальных поисков точных и эффективных аналитических решений. В настоящей работе представлена концепция аналитического подхода к решению наиболее важных и сложных в математическом отношении задач механики деформируемых систем. Рассматриваемый подход позволяет сократить объем и стоимость трудоемких вычислительных операций. Разработанные алгоритмы обеспечивают решение наиболее сложных дифференциальных уравнений четвертого и восьмого порядков в частных производных и в итоге получать расчетные формулы, содержащие хорошо изученные алгебраические функции.

Целью настоящих исследований является обобщение результатов и выводов в области теории и практики использования теоремы разложения и создания наиболее эффективного математического аппарата для решения контактных задач механики разрушения тонкостенных элементов.

Предварительно рассмотрим общие вопросы из теории разложения алгебраических функций. Теорему разложения формулируют следующим образом: любое отношение $g(x)/f(x)$ многочлена $g(x)$ степени m и многочлена $f(x)$ степени n>m без общих корней может быть представлено в виде суммы n элементарных дробей

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\sum_k\left(\frac{bk_1}{(x-x_k)}+\frac{bk_2}{(x-x_k)^2}+\ldots+\frac{bkm_k}{(x-x_k)^{m_k}}\right),$$

где

$g(x)$ – многочлен степени $m$;

$f(x)$ – многочлен степени $n>m$;

$bk_j$ – коэффициенты, определяемые тремя известными методами или их комбинациями.

В теории операционного исчисления теорему разложения трактуют так: всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы элементарных дробей четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$, где $k\geq 2$.

© Сойкин Б. М., Георгиев А. А., 2013

Обратимся к анализу типовых соотношений, имеющих большое научное и практическое значение. Интерес имеет рассмотрение задачи по упрощению алгебраической дроби путем её разложения на элементарные дроби. Традиционная методика предусматривает проведение тождественных преобразований, в результате которых получают хорошо известное разложение следующего вида:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}=A\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)}+\frac{\left(B-A\cdot\frac{a_1}{2}\right)}{\left(P+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{2}}\right)^2}$$

Правая часть полученного равенства представляет собой сумму двух алгебраических дробей, каждая из которых имеет знаменатель в виде квадратичной функции (многочлена) второй степени, т.е. такой же, как и у знаменателя исходной дроби, подлежащей разложению. Высокий порядок исследуемых функций в правой части, а также сложность математического описания существенно затрудняют их практическое применение. Еще более громоздким и неподъемным по структуре является стандартное разложение. Некоторые частные формы разложений можно найти лишь в раритетных изданиях отечественных авторов (Н. С. Пискунова, А. И. Лурье, В. А. Диткина, В. И. Смирнова, И. Н. Бронштейна, Г. М. Фихтенгольц и др.). Вместе с тем, существует большой класс прикладных задач, связанных с решением двумерных дифференциальных уравнений высших порядков (четвертого, восьмого и т.п.). Последний случай имеет место при исследовании напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек, подвергаемых воздействию нормальной сосредоточенной и распределенной нагрузки. Эти задачи, на практике решаемые численными методами, могут быть разрешены и аналитически. Для этого следует применить новые нетрадиционные приемы разложения алгебраических дробей.

Обратимся к анализу конкретных результатов исследований. Сначала дадим формулировку теоремы разложения: всякую правильную рациональную алгебраическую дробь можно разложить на две элементарные дроби, содержащие в знаменателях функции (многочлены) с меньшей степенью по сравнению со степенью разлагаемой функции (многочлена). Теорема легко доказывается элементарными алгебраическими приемами (сложением, вычитанием и умножением). При этом буквенные обозначения в формулах (1-20) могут быть заменены на числовые.

Обратимся к рассмотрению конкретных формул, полученных на основе определения теоремы разложения. Формулы составлены по системе: «от простого – к сложному».

**Важнейшие разложения алгебраических дробей со знаменателем в виде многочлена (трехчлена) второй степени**

$$\frac{1}{x^2+2cx+d}=\frac{1}{2\Delta\left(x+c-\Delta\right)}-\frac{1}{2\Delta\left(x+c+\Delta\right)}, \tag{1}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{x}{x^2+2cx+d}=\frac{\Delta-c}{2\Delta\left(x+c-\Delta\right)}+\frac{\Delta+c}{2\Delta\left(x+c+\Delta\right)}, \tag{2}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

**Разложения некоторых дробей с исходными выражениями четвертого порядка**

$$\frac{1}{x^4+2cx^2+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{1}{x^2+c-\Delta}-\frac{1}{x^2+c+\Delta}\right), \tag{3}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{x}{x^4+2cx^2+d^4}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{1}{x^2-\Delta x+d^2}-\frac{1}{x^2+\Delta x+d^2}\right), \tag{4}$$

где $\Delta=\sqrt{2\left(d^2-c\right)}$; $d^2>c$

$$\frac{4x}{x^4+4c^2x^2+4d^4}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\left(x-\Delta\right)^2+\Delta_2}-\frac{1}{\left(x+\Delta\right)^2+\Delta_2}\right), \tag{5}$$

где $\Delta=\sqrt{d^2-c^2}$, $\Delta_2=d^2+c^2$

$$\frac{x^2}{x^4+2cx^2+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\Delta-c}{x^2+c-\Delta}+\frac{\Delta+c}{x^2+c+\Delta}\right), \tag{6}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{4x}{x^4+4d^4}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\left(x-d\right)^2+d^2}-\frac{1}{\left(x+d\right)^2+d^2}\right) \tag{7}$$

$$\frac{x}{x^4+c^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}c}\left(\frac{1}{\left(x-\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{c^2}{2}}-\frac{1}{\left(x+\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{c^2}{2}}\right) \tag{8}$$

$$\frac{4x}{x^4+4}=\frac{1}{(x-1)^2+1}-\frac{1}{(x+1)^2+1} \tag{9}$$

$$\frac{4xc}{x^4+4c^4}=\frac{1}{(x-c)^2+c^2}-\frac{1}{(x+c)^2+c^2} \tag{10}$$

$$\frac{4x}{1+4x^4}=\frac{1}{(1-x)^2+x^2}-\frac{1}{(1+x)^2+x^2} \tag{11}$$

$$\frac{x}{x^4+a^2x^2+a^4}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x^2-ax+a^2}-\frac{1}{x^2+ax+a^2}\right\} \tag{12}$$

**Разложения некоторых дробей со знаменателем в виде многочлена восьмого порядка**

$$\frac{1}{x^8+2cx^4+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{1}{x^4+c-\Delta}-\frac{1}{x^4+c+\Delta}\right), \tag{13}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{x^2}{x^8+4c^2x^4+4d^4}=\frac{1}{4\Delta}\left(\frac{1}{\left(x^2-\Delta\right)^2+\Delta_1}-\frac{1}{\left(x^2+\Delta\right)^2+\Delta_1}\right), \tag{14}$$

где $\Delta=\sqrt{d^2-c^2}$, $\Delta_1=c^2+d^2$

$$\frac{x^4}{x^8+2cx^4+d}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\Delta-c}{x^4+c-\Delta}+\frac{\Delta+c}{x^4+c+\Delta}\right), \tag{15}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{x^2}{x^8+a^2x^4+a^4}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x^4-ax^2+a^2}-\frac{1}{x^4+ax^2+a^2}\right\} \tag{16}$$

$$\frac{x^2}{x^8+2cx^4+d^4}=\frac{1}{2\Delta}\left\{\frac{1}{\left(x^2-\frac{\Delta}{2}\right)^2+\Delta_1}-\frac{1}{\left(x^2+\frac{\Delta}{2}\right)^2+\Delta_1}\right\}, \tag{17}$$

где $\Delta=\sqrt{2\left(d^2-c\right)}$, $\Delta_1=\frac{d^2+c}{2}$

$$\frac{x^2}{x^8+4d^4}=\frac{1}{4d}\left(\frac{1}{\left(x^2-d\right)^2+d^2}-\frac{1}{\left(x^2+d\right)^2+d^2}\right) \tag{18}$$

$$\frac{\left(a^2+x^2\right)^2}{\left(a^2+x^2\right)^4+2c\left(a^2+x^2\right)^2+d^2}=\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\Delta-c}{\left(a^2+x^2\right)^2+c-\Delta}+\frac{\Delta+c}{\left(a^2+x^2\right)^2+c+\Delta}\right), \tag{19}$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$

$$\frac{1}{x^8+2cx^4}=\frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+2c}\right) \tag{20}$$

Эффективность использования предлагаемых разложений легко устанавливается на нижеследующих примерах.

*Пример 1.* Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2+2cx+d}$.

*Решение*:

Воспользовавшись формулой разложения (1) для дроби с квадратичной функцией, найдем:

$$\int\frac{dx}{x^2+2cx+d}=\frac{1}{2\Delta}\int\frac{dx}{x+c-\Delta}-\frac{1}{2\Delta}\int\frac{dx}{x+c+\Delta}=\frac{1}{2\Delta}\ell n\,|x+c-\Delta|-\frac{1}{2\Delta}\ell n\,|x+c+\Delta|=\frac{1}{2\Delta}\ell n\left|\frac{x+c-\Delta}{x+c+\Delta}\right|,$$

где $\Delta=\sqrt{c^2-d}$, $c^2>d$

Сравнивая полученную формулу с формулой известного интеграла [2], обнаруживаем их полное совпадение.

Для решения поставленной задачи традиционным методом потребовались бы более сложные и трудоемкие выкладки на одной, двух страницах машинописного текста.

*Пример 2*. Вычислить интеграл $\int \frac{x \quad dx}{x^2+2cx+d}$.

*Решение*:

Применяя другую формулу разложения (2), найдем:

$$\int \frac{x \quad dx}{x^2+2cx+d} = \frac{1}{2\Delta}\int \frac{\Delta - c}{x+c-\Delta}dx + \frac{1}{2\Delta}\int \frac{\Delta + c \quad dx}{x+c+\Delta} = \frac{\Delta - c}{2\Delta}\ell n\,|x+c-\Delta| + \frac{\Delta + c}{2\Delta}\ell n\,|x+c+\Delta| =$$

$$= \frac{1}{2}\ell n\,|x^2+2cx+d| - \frac{c}{2\Delta}\ell n\frac{x+c-\sqrt{c^2-d}}{x+c+\sqrt{c^2-d}} = \frac{1}{2}\ell n\,|x^2+2cx+d| - \frac{c}{2\sqrt{c^2-d}}\ell n\frac{x+c-\sqrt{c^2-d}}{x+c+\sqrt{c^2-d}},$$

что также совпадает с известным решением [Там же].

Приведенные примеры показывают, что разложение алгебраических дробей по предлагаемому способу приводит к более простым средствам интегрированных уравнений.

Разложения (3), (4) эффективно использовать при решении задач, связанных, например, с изгибом прямоугольных пластин на упругом основании [7, с. 9-13].

Разложения (15), (19) рационально применять при анализе наиболее сложных дифференциальных уравнений с частными производными восьмого порядка. В операторной форме это уравнение имеет вид

$\Delta\Delta\Delta\Delta F + \frac{1-v^2d^4F}{c^2d\xi^4} = 0$, где $F(x,y)$ – функция внешней нагрузки, определяющая деформированное и напряженное состояние цилиндрической оболочки. Известное решение перечисленных задач численными методами неэффективно, а подчас и невозможно ввиду большого объема работ, связанных с вычислением бесконечных сумм двойных тригонометрических рядов. А при исследовании напряжений в оболочке в точке приложения внешней нагрузки эти ряды становятся расходящимися. Для получения достаточно точного результата требуется удерживать миллионы членов двойного тригонометрического ряда, что практически невозможно осуществить даже на базе быстродействующего компьютерного оборудования.

Формулы (1)-(6) эффективно использовать и в операционном исчислении в задачах по обратному преобразованию Лапласа [4].

Разработанные формулы могут найти применение и для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Это полезно при исследовании уравнений механических и электрических колебаний в случае действия периодической внешней силы.

**Выводы**

1. Установлена реальная возможность и целесообразность применения теоремы разложения для решения важнейших научно-практических задач.
2. Получены новые формулы разложений алгебраических уравнений, обеспечивающих понижение степени разлагаемой функции (многочлена).
3. Разобраны примеры практической реализации новых решений для вычисления неопределенных интегралов, имеющих большое научное значение.
4. Разработанные формулы позволяют: вычислять несобственные интегралы с неограниченными пределами; находить суммы одинарных и двойных тригонометрических рядов; проводить интегральные преобразования в теории операционного исчисления; осуществлять аналитическое решение двумерных задач, связанных с интегрированием дифференциальных и алгебраических уравнений четвертой и восьмой степеней.
5. Представленные в статье разложения позволяют приводить исследуемые сложные функции к более простым и компактным решениям. На основе этого разработана новая методология аналитического решения прикладных задач по технологии механической обработки конструкционных материалов [5-8].
6. В цитируемых работах показана актуальность и экономическая целесообразность развития и распространения в теории и практике концепции аналитического решения контактных задач, встречающихся в современных технико-технологических системах.
7. Разработанные преобразования к теореме разложения дают простые рекуррентные схемы, полезные при исследовании уравнений и в других областях науки и техники (математической физике, электротехнике, радиотехнике, информационных системах и др.).

В заключение следует сказать, что разработанная методика разложения алгебраических дробей может быть распространена и на случай, когда разлагаемая дробь является неправильной, т.е., когда степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе. Здесь эффективнее использовать другую известную теорему разложения, сформулированную следующим образом: каждая рациональная функция от $x$ может быть представлена в виде суммы многочлена и конечного числа элементарных дробей [4, с. 43]. Представленные в статье инварианты алгебраических преобразований легко реализуются, если исследуемая функция имеет вид неполного алгебраического уравнения. В тех задачах, где в качестве исходных используются функции, имеющие полную форму записи в виде степенного уравнения (квадратного, биквадратного и т.п.), это потребует дополнительных, более сложных эквивалентных преобразований, выходящих за рамки

данной работы. Общие вопросы из теории разложения алгебраических функций могут быть полезны для математиков-прикладников, вычислителей, механиков, инженеров-конструкторов, технологов, аспирантов и студентов вузов, изучающих объекты машиностроения, приборостроения и судостроения.

Некоторые варианты из вышеприведенных равенств могут использоваться в качестве учебного материала для абитуриентов, практикующихся в задачах по теме «упростить выражение».

*Список литературы*


1. **Вычислительные методы в механике разрушения** / под ред. С. Атлури; пер. с англ. А. С. Кравчука и Е. Г. Кузовкова. М.: Мир, 1990. 392 с.
2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
3. **Зайденберг А. И.** Унифицированные методы расчета оболочек (с учетом точности её геометрических параметров). М.: Изд-во стандартов, 1989. Вып. 9. Стандартизация расчетов и испытаний на прочность. 79 с.
4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
5. **Сойкин Б. М.** Актуальные проблемы механической обработки тонкостенных цилиндрических оболочек, выполненных из ортотропных материалов // Металлообработка. 2004. № 3 (21). С. 2-6.
6. **Сойкин Б. М.** Анализ напряженно-деформированного состояния листовой заготовки, находящейся под воздействием инструмента-индентора // Проблемы машиноведения и машиностроения: межвуз. сб. СПб.: СЗТУ, 2003. Вып. 30. С. 9-13.
7. **Сойкин Б. М.** Аналитический метод решения контактных задач механики следящих технологических систем // Проблемы машиноведения и машиностроения: межвуз. сб. СПб.: СЗТУ, 2003. Вып. 30. С. 4-8.
8. **Сойкин Б. М., Никитин М. А.** Вопросы оптимизации конструкторско-технологических параметров цилиндрических оболочек, подверженных воздействию нормальных сосредоточенных и распределенных нагрузок // Проблемы машиноведения и машиностроения: межвуз. сб. СПб.: СЗТУ, 2004. Вып. 37. С. 26-34.
9. **Сойкин Б. М., Шемелев Ю. Ю., Никитин М. А., Осипенко Е. В.** Влияние упругих деформаций тонкостенных цилиндрических оболочек из ортотропных материалов на точность и производительность обработки // Металлообработка. 2004. № 5 (23). С. 7-13.
10. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.


---

УДК 328.18
**Политология**

*В проведенном исследовании были проанализированы сложившиеся межэлитные отношения, а также отношения губернатора Воронежской области с разными уровнями власти. Это помогает определить сформировавшуюся на определенном временном промежутке модель губернаторского лидерства, объяснить происходящие политические процессы.*

*Ключевые слова и фразы:* губернатор Воронежской области; политическое лидерство; региональный политический процесс; внутриэлитные отношения; компромисс; конфронтация.

**Спиров Артем Сергеевич**
*Воронежский государственный университет*
*Art-linkin@yandex.ru*

## ГУБЕРНАТОР ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ КАК КЛЮЧЕВОЙ АКТОР ПОЛИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В РЕГИОНЕ©

Для исследователей политического развития России основной проблемой является ее многомерная диверсификация на региональном уровне. Оставив без внимания вопрос о сходствах и различиях трансформаций в регионах, нельзя ответить на этот же вопрос, но уже в рамках государства. Для того, чтобы судить о закономерности региональных политических процессов, В. Я. Гельман предлагает начинать их изучение с концептуализации эмпирического материала с помощью так называемых плотных описаний и исследования отдельных случаев [3, с. 111]. Эмпирическим референтом в данном случае будет выступать процесс трансформации регионального политического режима в Воронежской области. При этом основное внимание уделим таким характеристикам как ресурсные составляющие региона, конфигурация основных акторов и специфика их взаимодействия. Кроме того, нельзя отрицать того, что особенность российской политической культуры показывает высокую степень ориентации в политической жизни на губернатора как на конкретную личность. Например, как отмечает О. В. Гаман-Голутвина, «смена первого лица региона зачастую влечет за собой не только персональные перестановки в администрации, но и изменение механизмов и каналов рекрутирования управленческих команд, поскольку социально-демографические, психологические, лидерские и иные характеристики региональных властных сообществ во многом зависят от политической биографии первого лица субъекта РФ» [2, с. 392-393]. В данной статье мы проводим анализ регионального полити-

© Спиров А. С., 2013