основные законы экономических и естественнонаучных дисциплин в решении профессиональных задач), ПК-17, ПК-18 (способность организовывать и принимать участие в проведении экспериментальных исследований, анализировать полученные результаты) [3]. В Таблице 1 приведены некоторые признаки креативных качеств личности и компетенции, для формирования которых необходимы названные признаки.

В своей работе мы стараемся найти такие средства обучения, в которых будет востребован творческий потенциал личности студента. Примером могут служить творческие задания на материале смежных дисциплин, для решения которых требуется привлечение математического аппарата.

Задание 1. Вероятность неправильной постановки диагноза заболевания при первичном осмотре животного равна 0,1. Рассмотреть ситуацию в одном из аспектов: 1) повторные независимые испытания; 2) классическая вероятность, сложение и умножение вероятностей. В рамках выбранного аспекта составить: а) задачу на вычисление вероятности; б) ввести случайную величину и представить закон ее распределения (табличным или графическим способом).

Задание 2. При вливании глюкозы ее содержание (c) в крови больного является функцией времени (t) и выражается зависимостью $c(t) = a - be^{-t}$, где a, b – const. Экспериментально получены данные ($e \approx 2{,}7$): 1) t_1=0; c_1=2; 2) t_2=1; c_2= $7\frac{1}{27}$. Выберите и решите не менее двух заданий из предложенных:

а) постройте график зависимости $c(t)$;

б) найдите равновесное содержание глюкозы в крови больного;

в) исследуйте скорость изменения содержания глюкозы в крови.

Предложенные задания имеют практико-ориентированную направленность и выполняют следующие функции: дидактическую (обобщение и систематизация знаний разделов «Случайные события», «Случайные величины» (Задание 1), «Дифференциальное исчисление» (Задание 2)); развивающую (в процессе выбора и решения задач развиваются креативные качества личности). В отличие от традиционного изучения учебного материала, описанные средства обучения является средой, в которой актуализируются креативные качества личности.

Формирование личностного опыта креативной деятельности позволит современному студенту стать активным субъектом процесса обучения, а вузу – подготовить квалифицированного работника, готового к профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Список литературы

1. **Дружинин В. Н.** Экспериментальная психология: учебник для вузов. 2-е изд., доп. СПб.: Питер, 2003. 319 с.
2. **Петрова В. Н.** Формирование креативной личности в процессе обучения в вузе [Электронный ресурс] // Знание. Понимание. Умение: информационный гуманитарный портал. 2009. № 7. Биоэтика и комплексные исследования человека. URL: http://www.zpu-journal.ru/e-z /2009/7/P t v / (дата обращения: 19.08.2013).
3. **Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 111900.62 – Ветеринарно-санитарная экспертиза (ФГОС-3).** М.: Министерство образования РФ, 2009. 19 с.
4. **Хуторской А. В.** Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения. М.: Изд-во МГУ, 2003. 416 с.

УДК 532.59
Физико-математические науки

Основное внимание в работе автор акцентирует на вкладе в решение неоднородного уравнения Гельмгольца для вертикального смещения линии тока от второй гармоники в разложении завихренности в ряд Фурье в стратифицированном потоке. Используется представление решения через функцию Грина, удовлетворяющую принципу причинности. Из выполнения условия непротекания на поверхности цилиндра получено распределение силовых источников, моделирующих обтекаемое тело, с учетом завихренности в потоке во втором приближении.

Ключевые слова и фразы: неоднородное уравнение Гельмгольца; функция Грина; вертикальное смещение линии тока; граничные условия типа Дирихле; завихренность; ряд Фурье.

Пыркова Ольга Анатольевна, к. ф.-м. н., доцент
Московский физико-технический институт (государственный университет)
opyr@mail.ru

ВКЛАД ОТ ЗАВИХРЕННОСТИ В РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ ЛИНИИ ТОКА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ©

В работе [6] для вертикального смещения линии тока $\bar{\xi}$ было получено неоднородное уравнение Гельмгольца в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial \bar{y}^2}+k_0{}^2a^2\bar{\xi}=\bar{f}_y+\bar{\Omega}_0\,, \tag{1}$$

с граничным условием типа Дирихле, обеспечивающим условие непротекания на поверхности цилиндра:

$$\bar{\xi}=\sin\theta\,. \tag{2}$$

Здесь: $\bar{x}=\dfrac{x}{a}$, $\bar{y}=\dfrac{y}{a}$ – безразмерные горизонтальная и вертикальная, соответственно, координаты точки; a – радиус обтекаемого цилиндра; $k_0=\dfrac{N}{U_0}$, где U_0 – скорость набегающего невозмущенного потока, а $N^2=-\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{\partial\rho_0}{\partial y}$ – частота Брента-Вяйсяля; $\bar{f}_y$ – силовые источники, моделирующие цилиндр, $\bar{\Omega}_0(\bar{r},\phi)$ – завихренность в потоке [3].

Решение уравнения (1), как было показано в [5], может быть представлено через функцию Грина [2], удовлетворяющую принципу причинности [1; 3; 7].

Завихренность в потоке представляется в виде суперпозиции завихренности в следе $\bar{\Omega}_0^*(\bar{r},\phi)$ и завихренности около обтекаемого цилиндра. Распределение завихренности вблизи поверхности тела (даже при числе Рейнольдса $\mathrm{Re}>>1$, $\mathrm{Re}_a=\dfrac{\mathbf{U}_0a}{\nu}$, $\mathbf{U}_0$ – горизонтальная составляющая скорости невозмущенного набегающего потока, ν – коэффициент вязкости) имеет достаточно сложный вид. Для его аппроксимации используется разложение в ряд по синусам [8], используемое как в предыдущих работах [4; 5], так и в настоящей работе. Следует заметить, что учет первого слагаемого ряда (первое приближение) никак не описывает поле завихренности в окрестности зоны отрыва пограничного слоя, что может послужить причиной наличия определенных погрешностей в поле внутренних волн вблизи тела, поэтому представляется разумным рассмотреть также и второе слагаемое ряда (второе приближение):

$$\bar{\Omega}_0(\bar{r},\phi)\;=\;\sum_{s=1}^{\infty}d_s(\bar{r},\mathrm{Re}_a)\,\sin s\phi+\bar{\Omega}_0^*(\bar{r},\phi)\,. \tag{3}$$

Распределение силовых источников на поверхности цилиндра, моделирующих его, выбирается, исходя из выполнения условия непротекания (2) на его поверхности с учетом влияния завихренности.

Общий вид поправки к решению за счет завихренности в общем виде был получен в работе [5] с использованием функции Грина, удовлетворяющей принципу причинности:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}^{\omega}(\bar{r},\phi)=&\sum_{s=1}^{\infty}\int_1^{\bar{r}}d_s(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\left[\int_0^{\pi}G'^{+}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\sin s\phi'd\phi'\right]\bar{r}'d\bar{r}'+\\&+\sum_{s=1}^{\infty}\int_{\bar{r}}^{\infty}d_s(\bar{r}',\mathrm{Re}_a)\left[\int_0^{\pi}G'^{-}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\sin s\phi'd\phi'\right]\bar{r}'d\bar{r}'+\\&+\int_0^{\pi}\left[\begin{gathered}\int_1^{\bar{r}}\bar{\Omega}_0^*(\bar{r}',\phi')G'^{+}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\bar{r}'d\bar{r}'+\\+\int_{\bar{r}}^{\infty}\bar{\Omega}_0^*(\bar{r}',\phi')G'^{-}(\bar{r},\bar{r}',\phi,\phi')\bar{r}'d\bar{r}'\end{gathered}\right]d\phi'.\end{aligned} \tag{4}$$

В работе [4] рассматривался вклад в смещение линии тока за счет завихренности $\bar{\xi}^{\omega}$ от первого слагаемого в разложении завихренности около цилиндра в ряд в (3). Завихренность в следе учитывалась при этом в первом приближении:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_1^{\omega}(\bar{r},\phi)\;=\;&Y_1(k_0a\bar{r})\,\mathrm{J1}_1^{\bar{r}}(\mathrm{Re}_a,k_0a)\,\sin\phi+\\&+J_1(k_0a\bar{r})\,\mathrm{Y1}_{\bar{r}}^{\infty}(\mathrm{Re}_a,k_0a)\,\sin\phi+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}b_{n1}\,J_{2n}(k_0a\bar{r})\,\mathrm{J1}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a,k_0a)\,\sin 2n\phi\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $J_1\left(k_0 a\bar{r}\right)$, $Y_1\left(k_0 a\bar{r}\right)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, и для более краткой записи используются обозначения:

$$\mathrm{J1}_{\alpha}^{\beta}\left(\mathrm{Re}_a, k_0 a\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\pi}\left[\begin{array}{l} d_1\left(\bar{r}', \mathrm{Re}_a\right)\sin\phi' + \\ \\ +\bar{\Omega}_0^{*}\left(\bar{r}',\phi'\right)\end{array}\right] J_1\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin\phi' d\phi' \bar{r}' d\bar{r}'; \quad (6)$$

$$\mathrm{Y1}_{\alpha}^{\beta}\left(\mathrm{Re}_a, k_0 a\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\pi}\left[\begin{array}{l} d_1\left(\bar{r}', \mathrm{Re}_a\right)\sin\phi' + \\ \\ +\bar{\Omega}_0^{*}\left(\bar{r}',\phi'\right)\end{array}\right] Y_1\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin\phi' d\phi' \bar{r}' d\bar{r}'.$$

Для выполнения условия непротекания (2) было получено следующее распределение силовых источников на поверхности цилиндра:

$$f_1 \approx 2\left\lfloor J_1\left(k_0 a\right)\mathrm{Y1}_1^{\infty}\left(\mathrm{Re}_a, k_0 a\right) - 1\right\rfloor. \quad (7)$$

Учет второго приближения. В настоящей работе рассматривается вклад в вертикальное смещение линии тока от второго слагаемого в разложении завихренности около цилиндра в ряд в (3). При $s = 2$ завихренность в следе учитывается во втором приближении. Согласно результатам [5], находим:

$$\bar{\xi}_2^{\omega}\left(\bar{r},\phi\right)=\int_{1}^{\bar{r}}\int_{0}^{\pi}\left[d_2\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin 2\phi' + \Omega_0^{*}\left(r',\phi'\right)\right]\sin 2\phi' \times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} J_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)Y_2\left(k_0 a\bar{r}\right)\sin 2\phi + \\ \\ +\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8\sin\left(2n-1\right)\phi}{\pi\left(\left(2n-1\right)^2-4\right)}J_{2n-1}\left(k_0 a\bar{r}\right)J_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\end{array}\right] d\phi' \bar{r}' d\bar{r}' +$$

$$+\int_{\bar{r}}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\left[d_2\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin 2\phi' + \Omega_0^{*}\left(r',\phi'\right)\right]\sin 2\phi' \times \quad (8)$$

$$\times\left[\begin{array}{l} J_2\left(k_0 a\bar{r}\right)Y_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin 2\phi + \\ \\ +\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8\sin\left(2n-1\right)\phi}{\pi\left(\left(2n-1\right)^2-4\right)}J_{2n-1}\left(k_0 a\bar{r}\right)J_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\end{array}\right] d\phi' \bar{r}' d\bar{r}' .$$

В дальнейшем опять для краткости записи вводится формальное обозначение:

$$b_{n2} = \frac{8}{\pi\left(\left(2n-1\right)^2-4\right)}. \quad (9)$$

Тогда выражение для поправки к вертикальному смещению линии тока за счет завихренности в потоке (8) принимает следующий вид:

$$\bar{\xi}_2^{\omega}(\bar{r},\phi)=\left[Y_2\left(k_0 a\bar{r}\right)\sin 2\phi+\sum_{n=1}^{\infty} b_{n2}J_{2n-1}\left(k_0 a\bar{r}\right)\sin(2n-1)\phi\right]\times$$

$$\times\int_1^{\bar{r}}\int_0^{\pi}\left[\begin{matrix} d_2\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin 2\phi'+ \\ \\ +\Omega_0^*(r',\phi')\end{matrix}\right]J_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin 2\phi' d\phi'\bar{r}'d\bar{r}'+$$

$$+J_2\left(k_0 a\bar{r}\right)\sin 2\phi\times$$

$$\times\int_{\bar{r}}^{\infty}\int_0^{\pi}\left[\begin{matrix} d_2\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin 2\phi'+ \\ \\ +\Omega_0^*(r',\phi')\end{matrix}\right]Y_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin 2\phi' d\phi'\bar{r}'d\bar{r}'+ \qquad (10)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_{n2}J_{2n-1}\left(k_0 a\bar{r}\right)\sin(2n-1)\phi\times$$

$$\times\int_{\bar{r}}^{\infty}\int_0^{\pi}\left[\begin{matrix} d_2\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin 2\phi'+ \\ \\ +\Omega_0^*(r',\phi')\end{matrix}\right]J_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin 2\phi' d\phi'\bar{r}'d\bar{r}'\ .$$

Для более краткой записи далее будут аналогично предыдущему использоваться нижеприведенные обозначения:

$$\mathrm{J2}_{\alpha}^{\beta}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_0^{\pi}\left|\begin{matrix} d_2\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin 2\phi'+ \\ \\ +\bar{\Omega}_0^*(\bar{r}',\phi')\end{matrix}\right|J_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin 2\phi' d\phi'\bar{r}'d\bar{r}'; \qquad (11)$$

$$\mathrm{Y2}_{\alpha}^{\beta}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_0^{\pi}\left|\begin{matrix} d_2\left(\bar{r}',\mathrm{Re}_a\right)\sin 2\phi'+ \\ \\ +\bar{\Omega}_0^*(\bar{r}',\phi')\end{matrix}\right|Y_2\left(k_0 a\bar{r}'\right)\sin 2\phi' d\phi'\bar{r}'d\bar{r}'.$$

Теперь выражение для вертикального смещения линии тока за счет наличия завихренности в потоке (10) с учетом обозначений (11) приобретает вид:

$$\bar{\xi}_2^{\omega}(\bar{r},\phi)\ =\ Y_2\left(k_0 a\bar{r}\right)\ \mathrm{J2}_1^{\bar{r}}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)\ \sin 2\phi+$$

$$+\ J_2\left(k_0 a\bar{r}\right)\ \mathrm{Y2}_{\bar{r}}^{\infty}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)\ \sin 2\phi+ \qquad (12)$$

$$+\ \sum_{n=1}^{\infty} b_{n2}\ J_{2n-1}\left(k_0 a\bar{r}\right)\ \mathrm{J2}_1^{\infty}\left(\mathrm{Re}_a,k_0 a\right)\ \sin(2n-1)\phi\ .$$

Для дальнейших выкладок потребуется воспользоваться результатом для отклонения линии тока, полученным в работе [Там же], опирающимся на тот факт, что при больших числах Фруда $\left(\mathrm{Fr}=\dfrac{U_0}{N\,a}\right)$ цилиндр с большой точностью моделируется первыми двумя гармониками в разложении силовых источников в ряд.

Тогда:

$$\bar{\xi}^{f}(\bar{r},\phi) = -\frac{f_1}{2}\sin\phi + \frac{4}{3}f_1 J_2(k_0 a)\, J_1(k_0 a) + \frac{\pi}{2} f_2 \sin\phi - \frac{4}{3} f_2 J_1(k_0 a)\, J_2(k_0 a)\ . \tag{13}$$

Для выполнения условия непротекания на поверхности обтекаемого цилиндра (2) и во избежание искажения его формы сумма всех компонент вертикального смещения линии тока $\bar{\xi}$, содержащих множитель $\sin 2\phi$, приравнивается нулю:

$$\begin{gathered} 0 = \frac{4}{3} f_1\, J_2(k_0 a)\, J_1(k_0 a) + \frac{\pi}{2} f_2\, J_2(k_0 a)\, Y_2(k_0 a) + \\ + \frac{8}{3\pi} J_2(k_0 a)\, \mathrm{J1}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a, k_0 a) + J_2(k_0 a)\, \mathrm{Y2}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a, k_0 a)\ . \end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя сюда значение для коэффициента при первой гармонике f_1 в разложении силовых источников, моделирующих цилиндр, в ряд Фурье, найденное ранее в работе [7], и учитывая асимптотики для функций Бесселя первого и второго рода при малых значениях аргумента:

$$J_1(k_0 a) \approx \frac{k_0 a}{2}\ ; \quad Y_1(k_0 a) \approx -\frac{1}{\pi}\,\frac{2}{k_0 a}\ ;$$

$$J_{2n}(k_0 a) \approx \left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n-1)!}\ ;$$

$$J_1(k_0 a) J_2(k_0 a) \approx \frac{(k_0 a)^3}{8}\ ; \tag{15}$$

$$J_\gamma(k_0 a) Y_\gamma(k_0 a) \approx -\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+1)} \approx -\frac{1}{\pi\,\gamma}\ ;$$

$$J_1(k_0 a) Y_1(k_0 a) \approx -\frac{1}{\pi}\ ; \quad J_2(k_0 a) Y_2(k_0 a) \approx -\frac{1}{2\,\pi}\ ,$$

получается окончательное выражение для коэффициента при второй гармонике f_2:

$$\begin{gathered} f_2 = \frac{32}{3}\left[J_1(k_0 a)\mathrm{Y1}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a, k_0 a) - 1 \right] J_2(k_0 a) J_1(k_0 a) + \\ + \frac{32}{3\pi} J_2(k_0 a) \mathrm{J1}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a, k_0 a) + 4 J_2(k_0 a) \mathrm{Y2}_1^{\infty}(\mathrm{Re}_a, k_0 a). \end{gathered} \tag{16}$$

Список литературы

1. **Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В.** Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью: препринт № 282. М.: ИПМ АН СССР, 1983. 59 с.
2. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
3. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Обтекание цилиндра потоком однородной стратифицированной жидкости // Современные вопросы механики сплошной среды: междувед. сборник. М.: Изд. МФТИ, 1985. С. 75-81.
4. **Пыркова О. А.** Вклад от завихренности в решение неоднородного уравнения Гельмгольца для смещения линии тока в первом приближении // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2013. № 2 (69). С. 151-153.
5. **Пыркова О. А.** Решение неоднородного уравнения Гельмгольца для смещения линии тока // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 8 (63). С. 137-141.
6. **Пыркова О. А.** Сведение системы уравнений обтекания цилиндра к уравнению для вертикального отклонения линии тока в плоском случае // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 2 (45). С. 46-49.
7. **Miles J. W., Hupper H. E.** Lee Waves in a Stratified Flow. Part 2. Semi-Circular Obstacle // Journal of Fluid Mechanics. 1968. Vol. 33. Part 4. P. 803-814.
8. **Noak B. R., Eckelmann H.** A Low-Dimensional Galerkin Method for the Three-Dimensional Flow around a Circular Cylinder // Physics of Fluids. 1994. Vol. 6. P. 124-143.