УДК 519.8
Физико-математические науки

В статье исследуется применение нечетких моделей в задачах классификации на основе предложенного автором представления данных в виде нечетких градаций. Проведено сравнение различных мер согласования объектов с классами и их влияние на результаты классификации. Показаны преимущества предлагаемого подхода, позволяющего расширить спектр разрешимых задач, повысить надежность распределения объектов по классам, уменьшить трудоемкость вычислений.

Ключевые слова и фразы: классификация; диагностирование; нечеткие модели; множество эталонов; степень согласования; мера расстояния.

Романов Вадим Николаевич, д.т.н., профессор
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», г. Санкт-Петербург
vromanvpi@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ©

Различным аспектам проблемы классификации посвящено большое число работ [1, с. 47; 2, с. 100; 6, с. 122]. Целью данной статьи является исследование нечетких моделей классификации в рамках предложенного автором подхода с использованием нечетких градаций [4, с. 8]. При этом классификация рассматривается как разновидность задачи принятия решений, в которой посредством обобщения нечетких фактов, характеризующих свойства, состояния или изменение состояний объектов, осуществляется выбор наилучшего класса для каждого объекта. Задача формулируется в следующем виде. Обозначим множество объектов $X = \{x_1, ..., x_m\}$, множество нечетких критериев (признаков), используемых для описания объектов и их состояний $\{K_1, ..., K_n\}$, множество эталонов $Y = \{y_{01}, ..., y_{0l}\}$, представленных нечеткими критериями $\{K_{01}\}, ..., \{K_{0l}\}$, и множество классов $Z = \{z_1, ..., z_p\}$, характеризуемых областью значений основных критериев, задаваемых в нечеткой форме $\{K_{z1}\}, ..., \{K_{zp}\}$. Требуется определить принадлежность объектов классам. Следует иметь в виду, что одному классу может соответствовать несколько эталонов, а сами классы распределены по некоторой области значений критериев. Все критерии задаются нечеткими градациями в диапазоне [ОН, ОВ], где ОН – очень низкое значение, ОВ – очень высокое значение. Без ущерба для общности можно принять, что критерии измеряются в прямой шкале, и наилучшим считается решение, ближайшее к эталону. Случай задания критической области может быть рассмотрен аналогично. Степень согласования α_j объекта x_u с эталоном y_{0v} по критерию *j* определяется с помощью матрицы соответствий [3, с. 148], в частности, $\alpha_j = \text{ОВ}$, если K_{uj} совпадает с K_{0vj}; $\alpha_j = \text{В}$, если K_{uj} и K_{0vj} различаются на одну градацию в ту или другую сторону; $\alpha_j = \text{С}$, если K_{uj} и K_{0vj} различаются на две градации; $\alpha_j = \text{Н}$, если K_{uj} и K_{0vj} различаются на три градации; $\alpha_j = \text{ОН}$, если K_{uj} и K_{0vj} различаются на четыре градации, и аналогично для промежуточных градаций. При определении критической области удобнее использовать меру расстояния между объектом и эталоном $d_j = \overline{\alpha}_j$, т.е. полагаем $d_j = \text{ОН}$, если K_{uj} совпадает с K_{0vj}; $d_j = \text{Н}$, если K_{uj} и K_{0vj} различаются на одну градацию, и т.д. Для определения степени согласования между объектами и эталонами и между эталонами и классами используем три вида функций: по наибольшему различию, а также функции Хемминга и Евклида. При использовании меры по наибольшему различию степень согласования объекта x_u с эталоном y_{0v} по всем критериям дается соотношением

$$\alpha_{uv} \equiv \alpha(x_u, y_{0v}) = \min_j \alpha_j \,. \tag{1}$$

Для функции Хемминга имеем

$$\alpha_{uv} = \frac{1}{n}\sum_j \alpha_j \,, \tag{2а}$$

где *n* – число критериев. Для функции Евклида имеем

$$\alpha_{uv} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_j \alpha_j^2} \,. \tag{2б}$$

Для степени согласования эталона y_{0v} с классом z_w имеем аналогичные соотношения. Определим эталон y_{0v*}, с которым объект x_u согласуется в наибольшей степени, выражением

$$\alpha_{uv*} = \max_v \alpha_{uv} \,. \tag{3}$$

Определим класс z_{w*}, с которым эталон y_{0v*} согласуется в наибольшей степени, соотношением

$$\alpha_{v*w*} = \max_{w} \alpha_{v*w}\,. \tag{4}$$

Класс z_{w*} одновременно является классом, с которым объект x_u согласуется в наибольшей степени. Степень согласования объекта x_u с классом z_{w*} определяется выражением

$$\alpha_{uw*} = \min(\alpha_{uv*}, \alpha_{v*w*})\,. \tag{5}$$

Таким образом, решение задачи нечеткой классификации устанавливает иерархическую связь между внешним уровнем (классы), системным (эталоны) и уровнем подсистем (объекты и факты). Оценим достоверность решения задачи нечеткой классификации. Определим достоверность соотнесения объекта x_u эталону y_{0v} соотношением

$$\alpha_{uv} > \nu_{uv}\,, \tag{6}$$

где ν_{uv} – индекс нечеткости, определяемый выражением

$$\nu_{uv} \in (\min_{j} \min(\alpha_j, \bar{\alpha}_j), \max_{j} \min(\alpha_j, \bar{\alpha}_j))\,. \tag{7}$$

Достоверность соотнесения эталона-представителя y_{0v} классу z_w определим аналогичным соотношением

$$\alpha_{vw} > \nu_{vw}\,, \tag{8}$$

$$\nu_{vw} \in (\min_{j} \min(\alpha_{j0vw}, \bar{\alpha}_{j0vw}), \max_{j} \min(\alpha_{j0vw}, \bar{\alpha}_{j0vw}))\,. \tag{9}$$

Таким образом, индексы нечеткости распределены по некоторой области, ограниченной нечеткими градациями. Соотнесение объекта x_u классу z_w считается достоверным, если одновременно выполняются оба неравенства (6) и (8).

Рассмотрим в качестве примера нечеткой классификации задачу диагностирования. Дано множество объектов $X = \{x_1, ..., x_6\}$, каждый из которых описывается нечеткими критериями $\{K_1, ..., K_8\}$. Тип объекта не конкретизируется, это может быть техническая система, человек, фирма, социальная система или система смешанного типа. Множество эталонов-представителей состоит из девяти элементов $Y = \{y_{01}, ..., y_{09}\}$, оцениваемых по тем же критериям, что и объекты. Множество классов состоит из трех классов, интерпретируемых в зависимости от предметной области $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Примем, что z_1 соответствует нормальному состоянию объектов (пригодные к эксплуатации, здоровые и т.п.), z_2 соответствует группе риска (требуются профилактика, наблюдение, отдых и т.п.), z_3 соответствует аномальной группе (аварийное состояние, поломка, болезнь, кризис и т.п.). Каждый класс характеризуется распределенной областью значений нечетких критериев. Требуется определить принадлежность объектов классам. Исходные данные представлены в Табл. 1. Следует учитывать, что принадлежность эталонов классам указана предположительно и должна проверяться в процессе решения задачи. Исходные данные подобраны с таким расчетом, чтобы исследовать возможности нечеткой классификации. Данные являются противоречивыми, а объекты, эталоны и классы пересекаются, так что определить решение затруднительно, и в классической постановке задача неразрешима. Используем сначала меру по наибольшему различию. Ниже даны результаты расчетов в сокращенном виде, подробно расчеты показаны только для характерных случаев, чтобы сделать изложение понятным. При определении принадлежности объектов эталонам и эталонов классам следует учитывать максимально удаленные градации, что позволяет определить степень согласования без утомительных вычислений. Для объекта x_1 имеем из соотношения (1)

$\alpha(x_1, y_{01}) = \alpha(x_1, y_{02}) = \alpha(x_1, y_{03}) = \alpha(x_1, y_{04}) = \alpha(x_1, y_{05}) = \text{С}$, $\alpha(x_1, y_{06}) = \alpha(x_1, y_{07}) = \alpha(x_1, y_{08}) = \text{Н}$, $\alpha(x_1, y_{09}) = \text{ОН}$.

Видно, что объект x_1 согласуется в максимальной степени с эталонами y_{01}, y_{02}, y_{03}, y_{04}, y_{05}. Теперь определим согласование этих эталонов с классами. Из соотношения (1) имеем аналогично $\alpha(y_{02}, z_1) = \text{ОВ} \vee \text{В} \vee \text{С}$, $\alpha(y_{02}, z_2) = \text{В} \vee \text{С} \vee \text{Н}$, $\alpha(y_{02}, z_3) = \text{С} \vee \text{Н} \vee \text{ОН}$. Такие же оценки получаются для эталонов y_{01} и y_{03}. Из соотношения (5) следует, что по эталонам y_{01}, y_{02}, y_{03} степень согласования с классом z_1 средняя: $\alpha(x_1, z_1) = \min(\text{С}, \text{ОВ} \vee \text{В} \vee \text{С}) = \text{С}$. Для эталона y_{05} имеем $\alpha(y_{05}, z_1) = \text{В} \vee \text{С} \vee \text{Н}$, $\alpha(y_{05}, z_2) = \text{ОВ} \vee \text{В} \vee \text{С}$, $\alpha(y_{05}, z_3) = \text{В} \vee \text{С} \vee \text{Н}$. Такие же оценки получаются для эталонов y_{04} и y_{06}. Отсюда следует, что по эталонам y_{04}, y_{05}: $\alpha(x_1, z_2) = \min(\text{С}, \text{ОВ} \vee \text{В} \vee \text{С}) = \text{С}$, а по эталону y_{06}: $\alpha(x_1, z_2) = \min(\text{Н}, \text{ОВ} \vee \text{В} \vee \text{С}) = \text{Н}$. Следовательно, объект x_1 согласуется как с классом z_1, так и с классом z_2 в одинаковой степени. Однако свидетельство по эталону y_{02} является более надежным, так как оно подтверждается двумя другими эталонами y_{01} и y_{03}. Свидетельство по эталону y_{05} подтверждается только одним эталоном y_{04}. Поэтому заключаем, что объект x_1 принадлежит классу z_1. Аналогично выполняются расчеты для других объектов. Результаты представлены в Табл. 2, 3. Суммируем результаты нечеткой классификации с использованием меры по наибольшему различию: объект x_1 принадлежит классу z_1, объекты x_2, x_3, x_4, x_5,

x_6 принадлежат классу z_2. Класс z_3 оказался пустым. Оценим достоверность классификации. Расчет индекса нечеткости по (7), (9) показывает, что он распределен в интервале $\nu \in (\text{ОН}, \text{С})$ и при сравнении объектов с эталонами, и при сравнении эталонов с классами, поэтому итоговые результаты достоверны. Оценки показывают, что центр распределения индекса нечеткости находится вблизи градации Н. В частности, при сравнении группы эталонов y_{01}, y_{02}, y_{03} с классом z_1 центр распределения находится слева от Н (меньше Н), при сравнении с классом z_2 равен Н и при сравнении с классом z_3 находится справа от Н (больше Н).

Таблица 1. *Исходные данные для примера*

Объекты	**Значения критериев**							
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
x_1	ОВ	В	С	С	В	С-В	С	Н
x_2	С	С	С	В	В	С	С	С
x_3	С	Н	С	В	С-В	Н	В	С
x_4	С	В	Н-С	Н	С	С	ОВ	ОН
x_5	В	Н-С	С	В	В	С	С	В
x_6	В	С	С	Н	В	С	В	В
Эталоны (свидетели)	**Значения критериев**							
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
$y_{01}(z_1)$	ОВ	ОВ	В	В	С	С	ОВ	В
$y_{02}(z_1)$	В	С	ОВ	С	ОВ	В	В	С
$y_{03}(z_1)$	С	В	С	ОВ	В	ОВ	В	С
$y_{04}(z_2)$	В	В	С	С	Н	Н	В	С
$y_{05}(z_2)$	С	Н	В	Н	В	С	С	Н
$y_{06}(z_2)$	Н	С	Н	В	С	В	С	Н
$y_{07}(z_3)$	С	С	Н	Н	ОН	ОН	С	Н
$y_{08}(z_3)$	Н	ОН	С	ОН	С	Н	Н	ОН
$y_{09}(z_3)$	ОН	Н	ОН	С	Н	С	Н	ОН
Классы	**Значения критериев**							
	K_{z1}	K_{z2}	K_{z3}	K_{z4}	K_{z5}	K_{z6}	K_{z7}	K_{z8}
z_1	Очень высокие, высокие или средние							
z_2	Высокие, средние или низкие							
z_3	Средние, низкие или очень низкие							

Примечание. В – высокое значение, С – среднее значение, Н – низкое значение, (С-В) – между средним и высоким значениями, (Н-С) – между низким и средним значениями, (ОН-Н) – между очень низким и низким значениями.

Следовательно, наибольшую достоверность имеет согласование этой группы эталонов с классом z_1. При сравнении группы эталонов y_{04}, y_{05}, y_{06} с классом z_1 центр распределения равен Н, с классом z_2 – меньше Н, с классом z_3 – больше Н. При сравнении группы эталонов y_{07}, y_{08}, y_{09} с классом z_1 центр распределения больше Н, с классом z_2 – равен Н, и с классом z_3 – меньше Н. При сравнении объектов с эталонами получаем следующие результаты. Для объектов x_1, x_2 центр распределения индекса нечеткости при сравнении с y_{06} равен (ОН-Н), а с остальными эталонами равен Н. Для объекта x_3 при сравнении с y_{04} центр меньше Н, а с остальными эталонами равен Н. Для объекта x_4 центр равен (ОН-Н) при сравнении с y_{08} и (Н-С) – при сравнении с y_{02}, а при сравнении с остальными эталонами равен Н. Для объектов x_5, x_6 при сравнении со всеми эталонами центр равен Н. Сопоставление полученных оценок с результатами, представленными в Табл. 2, 3, подтверждает правильность соотнесения эталонов классам и объектов эталонам, а также позволяет повысить надежность результатов классификации и выявить ошибки исходных данных. Если использовать для оценки степени согласования более мягкие меры Хемминга и Евклида, то расчеты по правилам нечеткой арифметики [5, с. 145] показывают, что в этом случае границы пересечения объектов с эталонами и эталонов с классами становятся более размытыми. Результаты представлены в Табл. 4, 5. Из соотношения (5) определяем принадлежность объектов классам. Объект x_1 следует отнести к классу z_2 (хотя по мере Хемминга его можно отнести и к классу z_1), объекты x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 принадлежат классу z_2 (хотя по мере

Хемминга x_5 можно отнести и к классу z_1). Классы z_1 и z_3 оказываются пустыми. Как видно, результаты классификации при разном выборе нечетких мер получаются близкими. Мера по наибольшему различию позволяет быстро определить «критическую область», т.е. классы, в которые объект заведомо не попадает. Меры Хемминга и Евклида позволяют уточнить результаты классификации. В случае неоднозначных результатов классификации при принятии окончательного решения о принадлежности объектов классам нужно учитывать внешние цели (приоритеты). В частности, в нашем примере при отнесении объекта к классу z_2 и, тем более, к классу z_3 возрастают прямые издержки (эксплуатационные расходы), а при отнесении к классу z_1 – косвенные издержки (последствия внезапного отказа).

Таким образом, проведенное исследование, подтвержденное расчетами, показывает, что предложенный подход к проблеме классификации позволяет расширить область разрешимых задач, повысить надежность решения и уменьшить трудоемкость вычислений. Отмеченные преимущества особенно заметны при применении подхода к задачам классификации в больших системах.

Таблица 2. *Степень согласования объектов с эталонами по (1)*

Эталоны	**Объекты**					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_{01}	С	С	Н	Н	Н-С	С
y_{02}	С	С	С	Н-С	С	С
y_{03}	С	С	Н	Н	С	Н
y_{04}	С	С	С	С	С	С
y_{05}	С	С	С	С	С	С
y_{06}	Н	В	С	С	С	С
y_{07}	Н	Н	Н-С	С	Н	Н
y_{08}	Н	Н	Н	Н	Н	Н
y_{09}	ОН	С	С	Н	Н	Н

Таблица 3. *Степень согласования эталонов с классами по (1)*

Эталоны	**Классы и область значений критериев**		
	z_1 ОВ $\vee$ В $\vee$ С	z_2 В $\vee$ С $\vee$ Н	z_3 С $\vee$ Н $\vee$ ОН
y_{01}, y_{02}, y_{03}	ОВ $\vee$ В $\vee$ С	В $\vee$ С $\vee$ Н	С $\vee$ Н $\vee$ ОН
y_{04}, y_{05}, y_{06}	В $\vee$ С $\vee$ Н	ОВ $\vee$ В $\vee$ С	В $\vee$ С $\vee$ Н
y_{07}, y_{08}, y_{09}	С $\vee$ Н $\vee$ ОН	В $\vee$ С $\vee$ Н	ОВ $\vee$ В $\vee$ С

Примечание. Порядок следования градаций в ячейках таблицы соответствует порядку следования градаций в классах; $\vee$ *– знак «или», означающий, что значения распределены («размазаны») по данной области.*

Таблица 4. *Степень согласования объектов с эталонами по (2а), (2б)*

Эталоны	**Объекты**					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_{01}	В	В	В	В	В	В
y_{02}	В	В	В	С-В	В	В (В-ОВ)
y_{03}	В	В-ОВ	В (В-ОВ)	В	В	В
y_{04}	В (В $\vee$ В-ОВ)	В	В-ОВ	В	В	В $\vee$ В-ОВ (В-ОВ)
y_{05}	В (В $\vee$ В-ОВ)	В-ОВ	В (В $\vee$ В-ОВ)	В	В (В $\vee$ В-ОВ)	В $\vee$ В-ОВ (В-ОВ)
y_{06}	В	В-ОВ	В	В	В	В (С-В $\vee$ В)
y_{07}	С-В (С-В $\vee$ В)	В	В	В	С-В	С-В $\vee$ В (В)
y_{08}	С-В	С-В	В	В	С-В	С-В
y_{09}	С-В	С-В	С-В	С-В	С-В	С $\vee$ С-В

Примечание. В скобках указаны значения для функции Евклида. При совпадении указано одно значение. (В-ОВ) – между очень высоким и высоким значениями.

Таблица 5. *Степень согласования эталонов с классами по (2а), (2б)*

Эталоны	Классы и область значений критериев		
	z_1 OB $\vee$ B $\vee$ C	z_2 B $\vee$ C $\vee$ H	z_3 C $\vee$ H $\vee$ OH
y_{01}, y_{02}, y_{03}	B $\vee$ B-OB $\vee$ B	B-OB $\vee$ B $\vee$ C	B $\vee$ C $\vee$ H
y_{04}, y_{05}, y_{06}	C $\vee$ B $\vee$ B-OB	B $\vee$ B-OB $\vee$ B	B-OB $\vee$ B $\vee$ C
y_{07}, y_{08}, y_{09}	H $\vee$ C $\vee$ B	C $\vee$ B $\vee$ B-OB	B $\vee$ B-OB $\vee$ B

Примечание. Результаты для функции Евклида совпадают в пределах четверти основной градации с результатами для функции Хемминга, поэтому различие несущественно.

Список литературы

1. **Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.** Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989. 607 с.
2. **Нечеткие множества и теория возможностей** / под ред. Р. Ягера. М.: Радио и связь, 1986. 408 с.
3. **Романов В. Н.** Кластерный анализ на основе нечетких моделей // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2013. № 10 (77). С. 147-151.
4. **Романов В. Н.** Нечеткие модели в теории систем. СПб.: ЛЕМА, 2014. 123 с.
5. **Романов В. Н.** Нечеткие модели принятия решений // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2013. № 5 (72). С. 144-147.
6. **Романов В. Н.** Нечеткие системы. СПб.: ЛЕМА, 2009. 183 с.

FUZZY MODELS USE IN CLASSIFICATION PROBLEMS

Romanov Vadim Nikolaevich, Doctor in Technical Sciences, Professor
G. V. Plekhanov Saint Petersburg State Mining Institute and Technical University
vromanvpi@mail.ru

The paper investigates fuzzy models use in classification problems on the basis of data representation in the form of fuzzy gradations proposed by the author. The comparison of various measures of objects matching with classes and their influence on classification results is carried out. The author shows the advantages of the proposed approach, which enables to extend the range of solvable problems, improve the reliability of objects distribution in classes, reduce the complexity of calculations.

Key words and phrases: classification; diagnosing; fuzzy models; variety of standards; degree of matching; measure of distance.

УДК 34
Юридические науки

Проблемы развития торговых отношений и продовольственной безопасности как на федеральном, так и на региональном уровне приобретают все большее значение. Это обусловлено не только экономическими предпосылками, но и социальными, организационными и правовыми особенностями развития Российской Федерации и ее субъектов, которые преимущественно распространяются на торговую деятельность, связанную с реализацией товаров потребительского назначения и предоставлением услуг общественного питания.

Ключевые слова и фразы: договор; закон; кластерный принцип; торговля; рынок.

Самойлова Валентина Владимировна, к.ю.н.
Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
wsamoilova@mail.ru

ПРОБЛЕМЫ ЗАКОНОДАТЕЛЬСТВА ГОРОДА МОСКВЫ О ТОРГОВЛЕ[©]

Вступивший в силу в 2010 году Федеральный закон от 28.12.09 № 381-ФЗ «Об основах государственного регулирования торговой деятельности в Российской Федерации» устанавливает, что правовое регулирование отношений в области торговой деятельности осуществляется нормативными правовыми актами Российской Федерации, законами субъектов Российской Федерации, иными нормативными правовыми актами субъектов Российской Федерации, то есть данный вопрос отнесен к предметам совместного ведения Российской Федерации и субъектов Российской Федерации [4].

Законодательство города Москвы как одного из крупнейших субъектов Российской Федерации по количеству населения также не стоит на месте и требует своего совершенствования с учетом новых реалий.