

Газиев Эскендер Линурович

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ

В статье рассмотрена проблема малых движений газожидкостной системы с учетом гравитационных и поверхностных сил. Приведены соответствующая начально-краевая проблема и краевая задача, описывающая равновесное состояние. Предложен приближенный метод для отыскания равновесной поверхности жидкости, учитывающий особенность в граничном условии задачи. Обсуждаются полученные численные результаты.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2015/12/12.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2015. № 12 (102). С. 51-53. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2015/12/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 517.9+519.6

Физико-математические науки

В статье рассмотрена проблема малых движений газожидкостной системы с учетом гравитационных и поверхностных сил. Приведены соответствующая начально-краевая проблема и краевая задача, описывающая равновесное состояние. Предложен приближенный метод для отыскания равновесной поверхности жидкости, учитывающий особенность в граничном условии задачи. Обсуждаются полученные численные результаты.

Ключевые слова и фразы: дифференциальное уравнение; задача Коши; краевая задача; вычислительный метод; асимптотическое разложение; гидросистема.

Газиев Эскендер Линурович, к. ф.-м. н.

Крымский инженерно-педагогический университет
egaziev@list.ru

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ[©]

Начало изучению проблем отыскания равновесных и устойчивых состояний гидродинамических систем было положено работами Т. Юнга, Ж. А. Ф. Плато, Дж. И. Тейлора, Дж. У. Рэлея, У. Томсона, П. С. Лапласа. В последующем оно было продолжено Н. Е. Жуковским, Н. Н. Моисеевым, В. В. Румянцевым, Ф. Л. Черноушко, В. А. Солонниковым, А. Д. Мышкисом, Н. Д. Крейном, Н. Д. Копачевским и др. (см. подробный обзор в монографии [2]). Особенно интенсивными исследования в этой области стали в эпоху создания космических аппаратов, когда стало возможным проводить наблюдения над действием капиллярных сил и слабым гравитационным полем в космосе.

Теоретические и поисковые исследования в земных условиях позволяют в определенной степени прогнозировать поведение гидродинамических систем, что является актуальным для проведения космических и подводных экспериментов. Следует упомянуть малую ресурсоемкость такого подхода. Цель данной работы – с использованием асимптотических разложений, учитывающих особенности задачи о равновесии двухкомпонентной среды с учетом сил гравитации и поверхностного натяжения, получить ее численное решение.

В гравитационном поле с интенсивностью $\vec{g} = -g\vec{k}$, \vec{k} – орт оси Oz , рассмотрим контейнер с твердой стенкой S , заполненный невязкой жидкостью заданного объема V_1 и плотности $\rho_1 = \text{const}$ (область Ω_1) и сжимаемым баротропным газом плотности $\rho_2 = \rho_2(z) = \rho_{2,0} \exp(-\varepsilon z)$ в области Ω_2 (над жидкостью). Тогда [1, с. 94-95; 3] проблема малых движений частиц жидкости и газа в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ относительно состояния покоя описывается начально-краевой задачей

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{f}_1, \quad \text{div } \vec{w}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (1)$$

$$\rho_{2,0} \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} = -\nabla p_2 - \rho_2 g \vec{k} + \rho_{2,0} \vec{f}_2, \quad \rho_2 + \text{div}(\rho_{2,0} \vec{w}_2) = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad (2)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } S_2, \quad (3)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = \zeta \quad \text{на } \Gamma, \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad (4)$$

$$p_1 - p_2 = \sigma \Delta_{\Gamma} \zeta + a(x) \zeta \quad \text{на } \Gamma, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \quad \text{на } \partial \Gamma, \quad (5)$$

$$a(x) = -\sigma(k_1^2 + k_2^2) + g(\rho_1 - \rho_{2,0}) \cos(\vec{n}, \vec{k}), \quad \chi = (k_s - k_r \cos \delta) / \sin \delta, \quad (6)$$

$$\vec{w}_i(0, x) = \vec{w}_i^0(x), \quad \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t}(0, x) = \vec{w}_i^1(x) \quad \text{в } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$\rho_2(0, x) = \rho_2^0(x) \quad \text{в } \Omega_2, \quad \zeta(0, x) = \vec{w}_1^0(x) \cdot \vec{n} = \vec{w}_2^0(x) \cdot \vec{n} = \zeta^0(x) \quad \text{на } \Gamma. \quad (8)$$

Здесь: \vec{w}_i , \vec{f}_i и p_i – вектор смещения, поле внешних сил и давление в области Ω_i соответственно; S_i – часть твердой стенки, примыкающей к области Ω_i ; $\rho_{2,0} = \rho_2(0)$ – плотность газа на равновесной поверхности Γ при $z = 0$; $\varepsilon = -g/a^2$; a – скорость звука в газе; \vec{n} – единичный вектор внешней нормали; δ – угол смачивания; $\vec{\nu}$ – нормаль к $\partial \Gamma$ в плоскости, касательной к Γ ; k_r и k_s – кривизны сечений Γ и S плоскостью, перпендикулярной к $\partial \Gamma$; k_1 и k_2 – главные кривизны равновесной поверхности Γ ; ζ – нормальная компонента смещения Γ ; σ – коэффициент поверхностного натяжения на Γ ; Δ_{Γ} – оператор Лапласа-Бельтрами, действующий на Γ . Отметим, что в данных рассуждениях величина g может отличаться от соответствующего значения в земных условиях.

Введем цилиндрическую систему координат $Or\theta z$. Далее, для общности рассмотрений, перейдем к безразмерным координатам и параметрам $B = (\rho_1 - \rho_{2,0}^0)gl^2 / \sigma$, $b = \rho_{2,0}^0 gl^2 / \sigma$, где l – характеристический размер контейнера. Как и в [3], будем искать Γ в параметрическом виде $\{r = r(s), z = z(s), \theta \in [0, 2\pi]\}$, где s – длина полудуги $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{\theta = const\}$, $s \geq 0$, в меридианном сечении контейнера. Тогда из (1)-(8) с использованием вариационного принципа стационарности потенциальной энергии получаем задачу Коши для системы обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$z'' = r'[C + Bz + bf_\varepsilon(z) - z'/r], \quad r'' = -z'[C + Bz + bf_\varepsilon(z) - z'/r], \quad (9)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = 0, \quad r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad (10)$$

$$f_\varepsilon(z) := [\exp(-\varepsilon z) - 1 + \varepsilon z] / \varepsilon, \quad C = const. \quad (11)$$

Эта задача имеет особенность при $s = 0$ (которой исходная начально-краевая проблема, вообще говоря, не обладает), и непосредственно применить для ее решения какой-либо из известных вычислительных методов не представляется возможным. Поэтому воспользуемся асимптотическим методом [2, с. 36] и представим искомое решение $\{r = r(s), z = z(s)\}$ в достаточно малой окрестности $(0, \tau)$ особой точки в виде степенного ряда

$$r(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i, \quad z(s) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i s^i \quad (12)$$

с неизвестными коэффициентами a_i и b_i , подлежащими определению. Формально продифференцируем представления (12) и получим, что

$$r'(s) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i s^{i-1}, \quad z'(s) = \sum_{i=1}^{\infty} i d_i s^{i-1}. \quad (13)$$

С учетом начальных условий (10) из (12), (13) следует, что $a_0 = d_0 = d_1 = 0$, $a_1 = 1$. Теперь умножим уравнения (9) на r и с использованием разложения $f_\varepsilon(z) = \frac{1}{2}\varepsilon z^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^2 z^3 + \dots$ (см. соотношение (11)) находим, что

$$a_2 = 0, \quad d_2 = C/4, \quad a_3 = -\frac{1}{24}C^2, \quad d_4 = -\frac{1}{192}C^3 + \frac{1}{64}BC, \quad a_5 = \frac{1}{1920}C^4 - \frac{1}{160}BC^2, \quad (14)$$

$$d_6 = \frac{\varepsilon}{1152}bC^2 + \frac{1}{23040}C^5 - \frac{1}{720}BC^3 + \frac{1}{2304}B^2C, \quad (15)$$

$$a_7 = -\frac{\varepsilon}{2688}bC^3 + \frac{1}{4480}BC^4 - \frac{5}{10752}B^2C^2 - \frac{1}{322560}C^6. \quad (16)$$

Сравнение этих формул и соответствующих результатов для одной жидкости (см. [2]) показывает, что члены асимптотических разложений до 5-го порядка в $r(s)$ и 6-го порядка в $z(s)$ совпадают; однако, начиная с 7-го порядка в $r(s)$ и 8-го порядка в $z(s)$, они различаются. Это уточнение может оказаться существенным уже при шаге интегрирования 10^{-6} , и тогда следует применять для начальных приближений уточненные формулы (14)-(16).

Спецификой задачи (1)-(8) является и наличие условия сохранения объема жидкости, см. (4). Именно это интегральное условие устанавливает взаимосвязь значений констант C и V_1 . В проблеме (9)-(11) оно принимает вид

$$V = \pi \int_0^{\tilde{s}} r^2 z' ds = const, \quad (r(\tilde{s}), z(\tilde{s})) \in \Gamma \cap S_1, \quad (17)$$

и его легко преобразовать к эквивалентному дифференциальному виду

$$V' = \pi r^2 z', \quad (18)$$

$$V(0) = 0, \quad V(\tilde{s}) = V_1. \quad (19)$$

Задача Коши для уравнений (9), (10), (18) с условиями $r(\tau) = r^\tau$, $z(\tau) = z^\tau$, (19), где r^τ , z^τ вычисляются по формулам (12), (14)-(16), решается итерационно с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка и контролем отсутствия самопересечений Γ_0 , т.е. $r'(s) \neq 0$, осуществляемым проверкой изменения знака $r'(s)$. Кроме того, поверхность Γ должна вписываться в контейнер; например, в случае цилиндрического сосуда необходимо следить за выполнением условий $z(0) \leq h_1$, $z(s_1) \leq h_2$, где h_1 и h_2 – вертикальные координаты нижнего и вертикального днищ контейнера.

С использованием описанной схемы проведены численные расчеты для различных значений параметров; некоторые результаты при $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 0,001$ г/см³, $l = h_1 = h_2 = 100$ см, $a = 33000$ см/с приведены в Табл. 1.

Таблица 1.

Результаты расчетов при $g = -0,0981$ см/с², $\varepsilon = -0,45 \cdot 10^{-8}$

s	$z(s)$	$z'(s)$	$r(s)$	$r'(s)$
0	-0,129999632	0,000736	0,001	0,999999729
0,05	-0,129460442	0,02101728	0,050996187	0,999777982
0,1	-0,127887949	0,041802191	0,100970462	0,999123444
0,15	-0,12526731	0,062963522	0,15090064	0,998011897

s	$z(s)$	$z'(s)$	$r(s)$	$r'(s)$
0,2	-0,121575843	0,084686822	0,200762964	0,996402391
0,25	-0,11678068	0,107162314	0,25053114	0,994235171
0,3	-0,110838975	0,130584663	0,300175331	0,99142963
0,35	-0,10369828	0,155152911	0,349661104	0,987881662
0,4	-0,095296088	0,18	0,398948142	0,983459819
0,45	-0,085559714	0,208544952	0,447988787	0,97800074
0,5	-0,074406596	0,237785135	0,496726427	0,971303969
0,55	-0,061743226	0,269000716	0,545093266	0,963124395
0,6	-0,04746563	0,302397379	0,593007964	0,953164563
0,65	-0,031459769	0,338170792	0,640372809	0,941065497
0,7	-0,013602254	0,376497847	0,687070387	0,926396246
0,75	0,006238427	0,417524333	0,732959695	0,908642336
0,8	0,028199953	0,461347964	0,777871663	0,887193475
0,85	0,052423217	0,507995427	0,821604052	0,861331216
0,9	0,079048054	0,557391924	0,863915757	0,830217738
0,95	0,10820721	0,609321448	0,904520614	0,792887646
1	0,140018067	0,663376034	0,943080934	0,748245661
1,05	0,174571518	0,718892424	0,979201147	0,695074455
1,08	0,196642979	0,752506295	0,999513837	0,658533325
1,081	0,197396065	0,753626635	1,000171707	0,657250833

Предложенная в данной работе вычислительная методика пригодна и для решения двумерной проблемы, в которой соответствующая задача типа (9)-(11), очевидно, уже не будет иметь особой точки, и тогда необходимость в асимптотических разложениях отпадает. В этом случае вычислительный процесс упрощается, графические результаты расчетов представлены на Рис. 1. Графики показывают, что с увеличением интенсивности гравитационного поля максимальный прогиб равновесной дуги увеличивается.

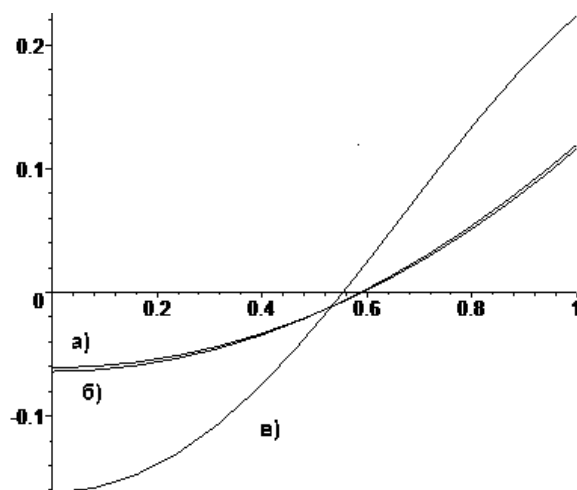


Рис. 1. Графики равновесной полудуги при $\delta = 70^\circ$: а) $g = 0,000981 \text{ см/с}^2$; б) $g = 0,00981 \text{ см/с}^2$; в) $g = 0,0981 \text{ см/с}^2$

Список литературы

1. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Приложения индефинитной метрики. Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. 276 с.
2. Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. К.: Наукова думка, 1992. 592 с.
3. Газиев Э. Л. О малых движениях и собственных колебаниях системы «идеальная жидкость – баротропный газ» // Таврический вестник информатики и математики. 2011. № 1. С. 127-137.

APPLICATION OF ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR NUMERICAL SOLUTION OF PROBLEM OF EQUILIBRIUM OF TWO-COMPONENT HYDRAULIC SYSTEM

Gaziev Eskender Linurovich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences
Crimea Engineering-Pedagogical University
egaziev@list.ru

The article deals with the problem of the small movements of the gas-liquid system with account of gravitational and surface forces. The author shows the corresponding initial-boundary value problem and boundary value problem describing equilibrium state. The paper proposes an approximate method for deducing the equilibrium surface of liquid taking into account the peculiarity of the boundary condition of the problem. The obtained numerical results are discussed.

Key words and phrases: differential equation; Cauchy problem; boundary problem; computational method; asymptotic expansion; hydraulic system.