Ковешников Евгений Валериевич, Танкевич Людмила Михайловна

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ И ЕЕ МЕСТО В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА

В статье рассматриваются особенности преподавания раздела "Преобразования плоскости", в частности - преобразования осевой симметрии. Авторами приводятся теоретические выкладки, а также подборка образцов задач, направленных на практическое усвоение учащимися материала. Данная работа может быть полезна преподавателям педагогических вузов, учителям средней школы, ведущим факультатив по основам высшей математики, и студентам соответствующих математических профилей.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2015/12/23.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2015. № 12 (102). C. 86-90. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2015/12/

Список литературы

1. **Волкова И. П.** Психология социальной адаптации и интеграции людей с глубокими нарушениями зрения: автореф. дисс. ... д. психол. н. СПб., 2010. 43 с.
2. **Мартынова Е. А.** Инклюзивное обучение как условие повышения качества образования студентов-инвалидов [Электронный ресурс]. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/inklyuzivnoe-obuchenie-kak-uslovie-povysheniya-kachestva-obrazovaniya-studentov-invalidov (дата обращения: 01.11.2015).
3. **Новиков М. Л.** Государственная политика в отношении трудовой занятости людей с инвалидностью: международный опыт и российская практика [Электронный ресурс]: пособие для специалистов, работающих в сфере трудоустройства людей с инвалидностью. URL: http://www.aup.ru/files/m608/m608.pdf (дата обращения: 05.11.2015).
4. **Новиков М., Присецкая Н., Котов В.** Создание модели трудоустройства молодых инвалидов: пособие по итогам проекта. М., 2006. 144 с.
5. **Собянин С.** В Москве трудоустроены более 70% инвалидов, желающих работать [Электронный ресурс]. URL: http://nashe-severnoetushino.ru/novosti/v-moskve-trudoustroeny-bolee-70-invalidov-zhelayushhih-rabotat-12-11-2015/ (дата обращения: 05.11.2015).

SOCIAL INTEGRATION OF YOUNG PEOPLE WITH DISABILITY

Karel'skaya Lyudmila Petrovna, Ph. D. in Philosophy, Associate Professor
Southern Federal University
ludakarel@gmail.com

The article examines the influence of the social model of disability on the process of the social integration of young people with restricted abilities. The author shows that within the framework of this model social policy aims to create barrier-free environment, in which a disabled person can become an equal member of the society acquiring profound education and competing successfully in the labour market.

Key words and phrases: social integration; social model of disability; inclusive education; quota system of working places; philosophy of independent life.

УДК 37
Педагогические науки

В статье рассматриваются особенности преподавания раздела «Преобразования плоскости», в частности – преобразования осевой симметрии. Авторами приводятся теоретические выкладки, а также подборка образцов задач, направленных на практическое усвоение учащимися материала. Данная работа может быть полезна преподавателям педагогических вузов, учителям средней школы, ведущим факультатив по основам высшей математики, и студентам соответствующих математических профилей.

Ключевые слова и фразы: преобразования плоскости; осевая симметрия; скользящая симметрия; композиция симметрий; параллельный перенос; поворот; методика преподавания математики в высшей школе.

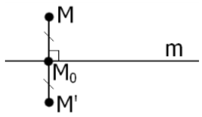
Ковешников Евгений Валериевич
Танкевич Людмила Михайловна
Дальневосточный федеральный университет
Yujin-k@list.ru; tankevich.lm@yandex.ru

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ И ЕЕ МЕСТО В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА©

Раздел «Преобразования плоскости» студенты-бакалавры профиля «Математика» начинают изучать на втором курсе, плавно и логично переходя к задачам на построение циркулем и линейкой [1-3]. После введения основных понятий первое преобразование плоскости, с которым знакомятся студенты, – это *движение*. Хотя на самом деле, с движением они впервые встречаются ещё в школьном курсе математики. Напомним, что в геометрии две фигуры называются равными, если их можно совместить с помощью движения. Такое определение проистекает ещё со времён Евклида, сформулировавшего его в своих «Началах».

Сами задачи, решаемые в этом курсе, можно условно поделить на две категории: графические и аналитические. Первые выполняются с помощью чертёжных инструментов и имеют иллюстрированное решение. Вторые же направлены на развитие у учащихся умения работать с уравнениями преобразований, производить вычисления. От студентов требуется уметь прочитать уравнения, проанализировать их, провести классификацию, выполнить над ними необходимые действия (например, составить композицию, т.е. произведение двух движений), а также записать уравнения преобразований по тем данным, что есть в условии.

Одно из ключевых мест здесь отводится такому движению как *осевая симметрия*. В курсе доказывается теорема, согласно которой *любое движение плоскости либо является осевой симметрией, либо представляет* *собой произведение не более трёх осевых симметрий*. Это очень важный вывод, поэтому симметрии необходимо уделить особое внимание. Весьма желательно разработать для студентов комплекс графических и аналитических задач, одной из целей которого будет как раз показать справедливость вышеупомянутой теоремы.



После ряда иллюстративных примеров вполне логично перейти к выводу уравнений. Они имеют очень простой вид, если в качестве оси симметрии взять координатные оси *Ox* или *Oy*: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ или $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$, где $M(x, y)$ – точка прообраза, а $M'(x', y')$ – точка образа. Однако всё становится намного сложнее, если за ось принять произвольную прямую *m* с уравнением $Ax + By + C = 0$. Как в таком случае по координатам точки-прообраза $M(x, y)$ найти неизвестные координаты точки-образа $M'(x', y')$? Обратим внимание, что в силу определения осевой симметрии, точка $M_0(x_0, y_0)$ – середина отрезка ММ', т.е. $M_0(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$. При этом точка $M_0 \in m$, т.е. её координаты удовлетворяют уравнению оси: $Ax_0 + By_0 + C = 0$, или $A\frac{x+x'}{2} + B\frac{y+y'}{2} + C = 0$ (*). Далее заметим, что $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{n} \perp \vec{a}$, где $\overrightarrow{MM'}(x'-x, y'-y)$, $\vec{n}(A, B)$ – нормальный вектор прямой *m*, $\vec{a}(-B, A)$. $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{a}$ можно записать так: $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{a} = 0$, или $-B(x'-x) + A(y'-y) = 0$ (**). Решая совместно уравнения (*) и (**) и принимая за неизвестные x' и y', получаем в итоге:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2}x - \dfrac{2AB}{A^2 + B^2}y - \dfrac{2AC}{A^2 + B^2} \\ y' = -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2}x + \dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}y - \dfrac{2BC}{A^2 + B^2} \end{cases}. \qquad (1)$$

Докажем, что полученные уравнения задают движение. Движение отличается от остальных преобразований плоскости тем, что является ортогональным преобразованием, т.е. имеет ортогональную матрицу. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ называется ортогональной, если $a_1^2 + a_2^2 = 1, b_1^2 + b_2^2 = 1$ и $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Проверим это. Матрица системы (1) имеет вид: $\begin{pmatrix} \dfrac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2} & -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2} \\ -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2} & \dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \end{pmatrix}$. С помощью несложных вычислений приходим к выводу, что матрица ортогональна, следовательно, (1) задают движение. Вычислим определитель системы. $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2} & -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2} \\ -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2} & \dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{(A^2 + B^2)^2}\begin{vmatrix} B^2 - A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2 - B^2 \end{vmatrix} = -1$, это говорит о том, что данное преобразование является движением второго рода.

Теперь докажем, что это будет именно осевая симметрия, для чего найдём неподвижные точки преобразования. Точка называется неподвижной (инвариантной), если в результате преобразования её прообраз и образ совпали, т.е.: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$. (2)

Известно, что ось симметрии вся состоит из неподвижных точек. Подставим (2) в (1). В итоге имеем следующую систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{2A^2}{A^2 + B^2}x + \dfrac{2AB}{A^2 + B^2}y = -\dfrac{2AC}{A^2 + B^2} \\ \dfrac{2AB}{A^2 + B^2}x + \dfrac{2B^2}{A^2 + B^2}y = -\dfrac{2BC}{A^2 + B^2} \end{cases}$. (3)

Умножим первое уравнение системы на $\dfrac{A^2 + B^2}{2A}$, а второе – на $\dfrac{A^2 + B^2}{2B}$, в результате чего получим: $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$. Это означает, что система имеет бесконечное множество решений, т.к. её уравнения одинаковы. Отсюда заключаем, что уравнение $Ax + By + C = 0$ есть уравнение оси симметрии. Важный вывод из решения задачи: *все неподвижные точки осевой симметрии лежат на её оси и более нигде*.

Скользящая симметрия – это *композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии*. Пусть вектор переноса $\vec{p}(x_0, y_0)$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2}x - \dfrac{2AB}{A^2 + B^2}y - \dfrac{2AC}{A^2 + B^2} + x_0 \\ y' = -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2}x + \dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}y - \dfrac{2BC}{A^2 + B^2} + y_0 \end{cases}, \qquad (4)$$

где $x_0 = -\alpha B,\ y_0 = \alpha A$, $\alpha \in R$ в силу определения. Уравнения (4) задают скользящую симметрию с осью $Ax + By + C = 0$ и вектором переноса $\vec{p}(-\alpha B, \alpha A)$.

Зададимся вопросом: *что если вектор переноса произволен*, т.е. в общем случае не параллелен оси, что в таком случае будут задавать уравнения (4)? Легко видеть, что тогда система (3) преобразуется так:

$$\begin{cases} \dfrac{2A^2}{A^2 + B^2}x + \dfrac{2AB}{A^2 + B^2}y = -\dfrac{2AC}{A^2 + B^2} + x_0 \left| \cdot \dfrac{A^2 + B^2}{2A} \right. \\ \dfrac{2AB}{A^2 + B^2}x + \dfrac{2B^2}{A^2 + B^2}y = -\dfrac{2BC}{A^2 + B^2} + y_0 \left| \cdot \dfrac{A^2 + B^2}{2B} \right. \end{cases}. \qquad (5)$$

После упрощения и замены соответствующих громоздких свободных членов на C_1 и C_2 получаем: $\begin{cases} Ax + By + C_1 = 0 \\ Ax + By + C_2 = 0 \end{cases}$. Очевидно, что такая система не будет иметь решений, ибо уравнения задают пару параллельных прямых. Отсутствие инвариантных точек говорит, что (4) в данном случае также задают скользящую симметрию с осью, проходящей через середину отрезка MM' и параллельной вектору переноса.

Решим теперь конкретную задачу. Преобразование плоскости задано уравнениями: $\begin{cases} x' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{21}{5} \\ y' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - \dfrac{13}{5} \end{cases}$. Определить его род и вид.

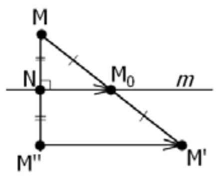
Решение

Убедившись в ортогональности матрицы преобразования, считаем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{vmatrix} = -\dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = -1$, из чего следует, что уравнения задают движение второго рода. Т.е. это либо осевая, либо скользящая симметрия. Выясним это, проверив преобразование на наличие неподвижных точек. В ходе приведения подобных слагаемых получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{5}y = \dfrac{21}{5} \\ -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{9}{5}y = -\dfrac{13}{5} \end{cases}. \qquad (6)$$

Умножим первое уравнение на 3 и сложим со вторым. Имеем: $\begin{cases} \dfrac{3}{5}x - \dfrac{9}{5}y = \dfrac{63}{5} \\ -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{9}{5}y = -\dfrac{13}{5} \end{cases} + \Rightarrow 0 = 10$. Получили противоречие. Система не имеет решений, т.е. преобразование не имеет инвариантных точек, следовательно, это – скользящая симметрия. Найдём её ось и вектор переноса. Известно, что коэффициенты при x и y одинаковые как для осевой, так и для соответствующей скользящей симметрии, их уравнения отличаются лишь свободными членами. Из системы (6) имеем: $A = 1, B = -3$, т.е. $\vec{n}(1; -3)$. Заметим, что свободные члены системы уже содержат в себе свободные члены m и n уравнений осевой симметрии и координаты x_0 и y_0 вектора переноса, т.е. $m + x_0 = \dfrac{21}{5}$, $n + y_0 = -\dfrac{13}{5}$. Далее составим систему и сложим уравнения: $\begin{cases} 3m + 3x_0 = \dfrac{63}{5} \\ n + y_0 = -\dfrac{13}{5} \end{cases}$.

Очевидно, что $3m + n = 0$, ибо эти свободные члены принадлежат осевой симметрии. Значит, $3x_0 + y_0 = 10$. Более того, по определению скользящей симметрии, $\vec{p} \perp \vec{n}$, т.е. $x_0 - 3y_0 = 0$. Решая совместно эти два уравнения, получаем, что $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Отсюда следует, что $m = \frac{6}{5}, n = -\frac{18}{5}$. Подставляя их в систему (6), получаем, что данное преобразование есть скользящая симметрия с осью $x - 3y - 6 = 0$ и вектором переноса $\vec{p}(3;1)$.



Замечание. Данную задачу можно было решить и другим способом. Как легко видеть из определения, если уравнения скользящей симметрии переводят произвольную точку *M* в точку *M'*, то её ось *m* проходит через середину M_0 отрезка *MM'*, а вектор переноса $\vec{p} = 2\overrightarrow{NM_0} = \overrightarrow{M''M'}$. 1) Зададим произвольно точку *M*, находим *M'*; 2) вычисляем координаты M_0; 3) далее из системы (6) находим $\vec{n}(1;-3)$ и ортогональный ему вектор $\vec{a}(3;1)$, который будет направляющим вектором оси *m*; 4) ось найдена. Найдём теперь вектор $\vec{p} = 2\overrightarrow{NM_0}$. Координаты M_0 известны. Точку *N* найдём из пересечения прямой $(M, \vec{n})$ и оси *m*. В итоге получим те же результаты.

Примеры задач

1. Осевая симметрия *f* задана уравнениями: $\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \\ y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{cases}$. Найти: $M' = f(M)$, если *M*(5,-10); *K*, если $K'(-17,-6)$; образ m' прямой $m: 5x + 10y - 3 = 0$; прообраз q прямой $q': 4x - 5y - 1 = 0$; уравнение оси симметрии.
2. Преобразование движения задано уравнениями: $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{22}{5} \end{cases}$. Определить род и вид, найти неподвижные точки, если есть.
3. Изобразить в тетради прямоугольную декартову систему координат и начертить в ней прямую $3x + y - 1 = 0$. Приняв её за ось симметрии, построить образ треугольника ABC, если A(4;-3), B(-1;3), C(5;5).
4. Решить предыдущую задачу аналитически, записав уравнения осевой симметрии. Найти образы прямых, на которых лежат стороны треугольника.
5. Решить Задачи 3 и 4 для случая скользящей симметрии с той же осью $3x + y - 1 = 0$ и вектором переноса $\vec{p}(1;-3)$.
6. Вершины треугольника-прообраза имеют координаты: A(1;2), B(2;7), C(5;2), а треугольника-образа: A'(-2;-1), B'(-7; -2), C'(-2;-5). Найти уравнения преобразования осевой симметрии, переводящей ΔABC в ΔA'B'C'. Найти уравнение оси симметрии. Сделать чертёж.
7. Показать, что $f \circ f = e$ – тождественное преобразование, где $f = S_m$, а прямая *m* задаётся общим уравнением.
8. **Задача-исследование.** Вывести уравнения композиции (произведения) двух осевых симметрий, оси которых заданы уравнениями: $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$. Доказать, что полученные уравнения задают параллельный перенос, найти вектор переноса.
9. **Задача-исследование.** Вывести уравнения композиции (произведения) двух осевых симметрий, оси которых заданы уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $A_1:A_2 \neq B_1:B_2$. Доказать, что полученные уравнения задают поворот, найти точку и угол поворота.
10. Доказать, что преобразование скользящей симметрии не имеет инвариантных точек.
11. Пусть $f = S_m$, $g = P_{\vec{p}}$, $f(M) = M', g(M') = M''$. Доказать, что если вектор $\vec{n}$ оси *m* коллинеарен вектору переноса $\vec{p}$, то M, M', M'' лежат на одной прямой, перпендикулярной оси *m*. При этом $M'' = S_q(M)$, где *q* – серединный перпендикуляр к отрезку MM''.
12. Записать уравнения композиции осевой симметрии с осью $2x + 5y - 3 = 0$ и параллельного переноса на вектор $\vec{p}(-4;3)$. Доказать, что это – уравнения скользящей симметрии. Найти ось и вектор переноса.
13. Записать уравнения композиции осевой симметрии с осью $2x - y + 1 = 0$ и параллельного переноса на вектор $\vec{p}(4;-2)$. Доказать, что это – уравнения осевой симметрии. Найти её ось.

14. Пусть $m: x+3y-2=0$ и $n: x+y-1=0$ – две прямые. Записать уравнения S_m и S_n. Найти композицию $S_n \circ S_m$ симметрий и определить вид полученного преобразования.

15. Пусть $m: x+2y-2=0$ и $n: -2x-4y+1=0$ – две прямые. Записать уравнения S_m и S_n. Найти композицию $S_n \circ S_m$ симметрий и определить вид полученного преобразования.

16. **Задача-исследование.** Опираясь на уравнения (1) и уравнения композиции двух осевых симметрий, рассмотрев все случаи, доказать утверждение: любое движение плоскости либо является осевой симметрией, либо представляет собой произведение не более трёх осевых симметрий.

Полученные выше уравнения можно переложить на программный код, написав, например, на ЯП *Pascal* или *Delphi* графические программы, которые бы давали наглядное решение той или иной задачи. Ведь если задача решена в общем виде, то решение частного случая уже не представляет труда. Это можно поручить студенту в рамках его курсовой или дипломной работы, связанной с преобразованиями плоскости.

Список литературы

1. **Александров П. С.** Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. М.: Наука, 1968.
2. **Атанасян Л. С., Базылев В. Т.** Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов: в 2-х ч. М.: Просвещение, 1986. Ч. I.
3. **Базылев В. Т. и др.** Геометрия: учеб. пособие для студентов I курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1974.

ROTATIONAL SYMMETRY AS TRANSFORMATION OF PLANE AND ITS PLACE IN GEOMETRY COURSE OF PEDAGOGICAL INSTITUTIONS OF HIGHER EDUCATION

Koveshnikov Evgenii Valerievich
Tankevich Lyudmila Mikhailovna
Far Eastern Federal University
Yujin-k@list.ru; tankevich.lm@yandex.ru

The article discusses the peculiarities of teaching the section “Transformations of Plane”, in particular, the transformation of rotational symmetry. The authors give theoretical calculations, as well as the selection of tasks samples aimed at students’ practical mastering the material. This work may be useful for the teachers of pedagogical institutions of higher education, secondary school teachers, teachers running additional courses on the basics of higher mathematics and for the students of appropriate mathematical specialization.

Key words and phrases: transformations of plane; rotational symmetry; glide reflection; composition of symmetries; parallel transport; rotation; methodology of teaching mathematics at higher school.

УДК 532.1
Физико-математические науки

В статье исследуется устойчивость крупномасштабного двумерного течения в турбулентной конвективной электропроводящей жидкости. В квазилинейном приближении показано, что в результате взаимодействия мелкомасштабного турбулентного течения (колмогоровского типа) с основным (крупномасштабным) потоком возникают эффекты отрицательной вязкости, магнитной вязкости и теплопроводности. Найдены критерии генерации крупномасштабного вихревого поля, магнитного поля и температуры в зависимости от характерных масштабов возмущений и параметров среды.

Ключевые слова и фразы: мелкомасштабная турбулентность; крупномасштабная неустойчивость; дисперсионное уравнение; конвективные течения; отрицательная кинематическая вязкость; магнитная вязкость; теплопроводность.

Копп Михаил Иосифович, к. ф.-м. н.
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Украина
michael.kopp@mail.ru

ГЕНЕРАЦИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ПОЛЕЙ В ДВУМЕРНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ[©]

1. Введение

В последнее время актуальное значение имеют вопросы, связанные с проблемой генерации крупномасштабных полей в турбулентных средах. Генерацией крупномасштабного магнитного поля в электропроводящих средах (плазма, жидкий металл) занимается теория динамо [2; 6; 10]. Аналогично генерацией крупномасштабных вихревых структур (КВС) (торнадо, тайфуны, циклоны и антициклоны и т.п.) занимается теория вихревого