DIFFERENT TYPES OF INDEPENDENT WORK AS MEANS OF RESEARCH ABILITIES FORMATION OF STUDENTS OF PEDAGOGICAL INSTITUTIONS OF HIGHER EDUCATION

Gorbuzova Marina Sergeevna
Solov'eva Viktoriya Valer'evna
Volgograd State Medical University
l-a-r-k-a@mail.ru

This paper studies the types of students' independent work and singles out forms that can represent this work. The authors specify the criteria and indicators of future teachers' research abilities development. As a means of research abilities formation the authors propose the use of independent work. The article also describes the ways of using various types of independent work in accordance with the level of the development of future teachers' research abilities.

Key words and phrases: research abilities; levels of research abilities development; criteria and indicators of research abilities development; independent work; type of independent work; form of academic independent work.

УДК 629.7.015(083.3)
Технические науки

В статье представлены новые теоретические аспекты математического моделирования динамики космических аппаратов (КА) с учетом упругости оболочек корпусов и выносных крупногабаритных элементов, а также приведен метод эффективного управления КА. Указанный метод и сформулированные теоретические аспекты в совокупности обеспечивают высокую производительность космических аппаратов и качество решений целевых задач, выполняемых ими в космосе и из космоса. Работа содержит обоснование необходимости использования для разработки математических моделей, описывающих движения КА, уравнений Лагранжа второго рода совместно с методиками замен систем отсчета и систем координат.

Ключевые слова и фразы: космический аппарат; система отсчета; управление космическими аппаратами; система координат; крупногабаритный упругий элемент конструкции космического аппарата; локальная система гашения колебаний; упругая оболочка корпуса космического аппарата.

Дементьев Илья Игоревич
Открытое акционерное общество «Машиностроительный завод "Арсенал"», г. Санкт-Петербург
arsenal@mzarsenal.spb.ru

МЕТОД РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ©

В XXI веке наблюдается тенденция к развитию космических систем с космическими аппаратами (КА) среднего и тяжелого классов, в составы которых включены крупногабаритные выносные упругие элементы конструкций (УЭК): панели солнечных батарей; штанги с рефлекторами; телескопы с длиннофокусными объективами; антенные панели; ядерные энергетические установки, имеющие системы отодвижения от приборных отсеков КА, и другие звенья.

Производительность космических аппаратов и качество решений их целевых задач, выполняемых в космосе и из космоса, неразрывно связаны с эффективностью управления указанными техническими устройствами. Раскрытия и изменения ориентаций УЭК, изменения углового положения КА и положения его центра масс сопровождаются колебаниями выносных элементов, которые, вследствие отсутствия в космическом пространстве вязкой демпфирующей среды, влияют на динамику аппарата в течение длительного промежутка времени после завершения какой-либо операции, связанной с управлением. Колебательные движения УЭК препятствуют приведению КА к заданной ориентации, обеспечению стабилизации выносных элементов и космического аппарата в целом на орбите функционирования.

Известны два метода решения поставленной проблемы. Первый метод предложен в работе [4] и заключается в использовании для управления КА алгоритмов формирования воздействий для исполнительных органов системы управления движением (СУД), базирующихся на получении информации как о состояниях элементов, которые правомерно считать абсолютно твердыми телами, так и о состояниях УЭК КА. Разработка указанных алгоритмов основана на математических моделях, описывающих движения космического аппарата и учитывающих инициированные колебаниями выносных элементов воздействия, влияющие на его динамику.

Важно подчеркнуть, что для современных КА указанный метод является неэффективным и, как правило, неприемлемым, что обусловлено большим количеством УЭК, включенных в состав аппарата и совершающих в определенном интервале времени колебательные движения с различными формами и параметрами колебаний. В описанных условиях формирование управляющих воздействий, обеспечивающих эффективное изменение положения КА в космическом пространстве, не представляется возможным, так как силы и моменты, создаваемые исполнительными органами СУД, оказывают различные влияния на каждый УЭК, что является причиной возникновения их автоколебаний, приводящих к срыву задачи управления КА вследствие потери устойчивости его СУД.

Наиболее эффективный метод управления космическим аппаратом описан в работах [2; 7, с. 494-497] и заключается в выполнении демпфирования колебательных движений выносных элементов с последующим приведением КА к заданному положению в космическом пространстве. Авторами перечисленных трудов предложено совместно с системой централизованного управления (СЦУ) аппаратом использовать локальные системы гашения колебаний (ЛСГК) его УЭК, исполнительными органами которых являются усовершенствованные электромеханические приводные устройства (ЭМПУ), предназначенные для приведения УЭК из транспортных положений в рабочие и для управления их ориентациями в процессе выполнения КА программы полета. Указанные ЛСГК относятся к активным управляемым системам «силового» воздействия и представляют собой отдельные управляющие контуры СУД. Для реализации эффективного управления космическим аппаратом необходимо обеспечить согласованное функционирование ЛСГК и СЦУ, что достигается за счет использования алгоритмов формирования управляющих воздействий для исполнительных органов локальных систем гашения колебаний и системы централизованного управления КА. Для составления указанных алгоритмов используются математические модели, описывающие движения космического аппарата на этапе его летной эксплуатации.

В работах [4; 7, с. 485-543] представлены системы уравнений, учитывающие инициированные колебаниями УЭК воздействия, влияющие на динамику КА, и приведены решения некоторых прикладных задач, связанных с определением и формированием управляющих сил и моментов для указанного технического устройства. Однако предложенные математические модели были составлены на основе принципа Гамильтона и, как следствие, корректно описывают только свободные движения космического аппарата и движения, совершаемые им в поле потенциальных воздействий с учетом результирующей силы инерции. Указанное обстоятельство обусловлено отсутствием лагранжиана для КА, движущегося под действием сил и (или) моментов, не имеющих силовых функций или функций обобщенных потенциалов.

Для эффективного решения поставленной проблемы математическое моделирование динамики КА должно выполняться на базе уравнений Лагранжа второго рода, представленных в работе [3, с. 31], с учетом комплексного влияния основных факторов космического пространства, управляющих сил и моментов, взаимодействий между элементами, составляющими техническое устройство.

Одним из основных этапов разработки математической модели, описывающей движения крупногабаритного КА, является выбор систем отсчета и «построение» систем координат.

В качестве системы отсчета для формирования математического описания динамики аппарата рационально использовать какой-либо астрономический объект, «мысленно» снабженный «часами», по которым отсчитывается математическое время. При выборе тела отсчета необходимо руководствоваться информацией о конструктивно-компоновочной схеме космического аппарата, о его назначении и программе полета, а также о технических возможностях КА в части фиксации физических величин (параметров), которые в любой момент времени задают его конфигурацию и состояние, определяющие движения аппарата относительно какого-либо материального объекта. Математические модели динамики искусственных спутников Земли, как правило, целесообразно разрабатывать в системе отсчета, которой является указанная планета. Относительно Солнца рационально описывать движения космических аппаратов, совершающих полеты к небесным телам Солнечной системы и использующихся для исследования дальнего космоса. В случаях, когда для получения решений прикладных задач возникает необходимость в выполнении математического моделирования динамики КА относительно его центра масс при отсутствии управляющих воздействий, и поступательные движения аппарата имеют второстепенное значение и могут не учитываться в системе уравнений, для формирования математического описания целесообразно выбрать собственную систему отсчета (ССО) КА. Соотношения, предназначенные для определения параметров угловых движений космического аппарата, изменяющихся под действием управляющих сил и моментов, рационально разрабатывать в системе отсчета, выбор которой обоснован включенными в состав КА техническими средствами, обеспечивающими фиксацию его положения и состояния относительно заданного астрономического объекта. Например, для формирования математического описания динамики аппарата, управление ориентацией которого выполняется относительно выбранной звезды и базируется на информации, полученной при помощи блоков определения координат звезд, в качестве системы отсчета рационально использовать указанное небесное тело.

Важно подчеркнуть, что астрономические объекты, снабженные «часами», и ССО КА не удовлетворяют ограничениям, справедливым для инерциальных систем отсчета (ИСО) [5, с. 252]:

$$\mathbf{V}_O(t) = const; \ \mathbf{Q}(t) = const; \ \boldsymbol{\omega}_O(t) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{V}_O(t)$ – вектор линейной скорости ИСО; $\mathbf{Q}(t)$ – тензор поворота инерциальной системы отсчета; $\boldsymbol{\omega}_O(t)$ – вектор левой угловой скорости ИСО; t – математическое время.

Математическое описание движений КА, составленное относительно какого-либо космического объекта, не является объективным и корректным, так как в рациональной механике для построения систем уравнений динамики механических систем и сплошных сред допускается использовать только инерциальные системы отсчета. Указанное требование, научное обоснование которого приведено в работе [Там же, с. 31-32], исключает произвол разработчика математической модели в выборе тела отсчета и обеспечивает объективность составленных соотношений за счет равноправности всех ИСО, что подтверждено принципом относительности Галилея. Как следствие, для разработки математической модели динамики КА отсутствует возможность использования ИСО, что обусловлено ограниченным количеством объектов, которые могут служить телами отсчета.

Решение поставленной проблемы заключается в «конструировании» инерциальной системы координат (ИСК) в неинерциальной системе отсчета (НСО), выбранной для формирования математического описания движений космического аппарата. Отсчетные и заданные абсциссы, ординаты и аппликаты связаны соотношениями, которые в общем виде представлены зависимостями [Там же, с. 30]:

$$\begin{gathered} x = x\left(X,\ Y,\ Z,\ t\right);\ y = y\left(X,\ Y,\ Z,\ t\right);\ z = z\left(X,\ Y,\ Z,\ t\right); \\ X = f\left[x(t),\ y(t),\ z(t)\right];\ Y = g\left[x(t),\ y(t),\ z(t)\right];\ Z = h\left[x(t),\ y(t),\ z(t)\right], \end{gathered} \tag{2}$$

где $X,\ Y,\ Z$ – отсчетные координаты; $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – заданные координаты.

Согласно равенствам (2), конфигурации и состояния, определяющие динамику элементов КА и математически описанные относительно ИСК, в любой момент времени являются известными относительно выбранной НСО, которую назовем базовой, а заданным в ней осям абсцисс, ординат и аппликат присвоим наименование базовой инерциальной системы координат.

В процессе выполнения программы полета элементы КА совершают трансляционные (поступательные) и спинорные (вращательные) движения. Корректная математическая модель динамики космического аппарата должна содержать уравнения и (или) слагаемые в выражениях, описывающие движения его звеньев как отдельных конструкций, объединенных между собой механическими связями. Приведенное утверждение обосновано необходимостью учета в процессе полета КА взаимодействий, возникающих между его элементами и влияющих на динамику технического устройства. Следовательно, совместно с базовыми системами отсчетных и заданных координат должны быть выбраны и «построены» дополнительные аналогичные «конструкции», предназначенные для составления математических описаний движений различных элементов космического аппарата.

Общее количество систем отсчета и систем координат, необходимое для разработки математической модели динамики КА, определяется суммой его элементов, к которым относятся:

- упругая оболочка корпуса (УОК) космического аппарата;
- монолитное жесткое тело, представляющее собой совокупность «мысленно» объединенных в единое целое конструкций (приборных рам, элементов продольного и поперечного силового набора, элементов системы обеспечения теплового режима КА и других его звеньев), размещенных во внутренней полости УОК космического аппарата;
- крупногабаритные выносные УЭК КА;
- электромеханические приводные устройства космического аппарата, предназначенные для приведения его УЭК из транспортных положений в рабочие, для управления их ориентациями в космическом пространстве и для формирования управляющих воздействий при выполнении функций исполнительных органов ЛСГК.

Для формирования математического описания движений КА перечисленные элементы необходимо разделить на две группы:

1) жесткие конструкции, которые правомерно считать абсолютно твердыми телами;

2) элементы, имеющие небольшие жесткости в определенных направлениях, которые необходимо учитывать при разработке системы уравнений динамики КА, и, как следствие, являющиеся упругими конструкциями.

К первой группе относятся электромеханические приводные устройства УЭК космического аппарата и жесткая монолитная часть его корпуса. В состав второй группы включены выносные упругие элементы и УОК КА.

Необходимость учета упругости оболочки корпуса космического аппарата обоснована в работе [1, с. 36-37], в которой установлено, что колебания УОК являются причиной получения при помощи закрепленных на ней измерительных приборов некорректной информации о величинах угловых скоростей КА и углов отклонения его корпуса от осей орбитальной системы координат. Авторами [Там же, с. 37-48] предложено использовать для описания движений космического аппарата математические модели, учитывающие упругость оболочки его корпуса в областях, в которых размещены командные приборы, и разработаны соответствующие системы уравнений.

Для выполнения математического моделирования динамики КА необходимо учитывать влияния воздействий, возникающих внутри механической системы вследствие взаимодействий ее элементов между собой. Следовательно, система уравнений, описывающая движения космического аппарата, должна учитывать упругость оболочки его корпуса в каждой зоне УОК, в которой размещены командные приборы и узлы крепления электромеханических приводных устройств с УЭК КА. При разработке математической модели динамики космического аппарата рационально в ее состав включить уравнения, учитывающие упругость оболочки корпуса КА как конструкции в целом и описывающие ее напряженно-деформированное состояние (НДС). Целесообразность использования указанных уравнений обусловлена большим количеством крупногабаритных

УЭК в составах современных космических аппаратов. При помощи выражений, предназначенных для получения решений прикладных задач, связанных с определением НДС УОК, сокращается количество соотношений в математической модели динамики КА по сравнению с моделями, в которых содержатся уравнения, учитывающие упругость оболочки корпуса аппарата в заданных областях конструкции. Параметры колебаний УОК в какой-либо ее зоне определяются на основе закона (формы) колебательного движения указанного тела, изменяющегося в заданном интервале времени.

Математические модели, описывающие напряженно-деформированные состояния упругой оболочки корпуса КА и его УЭК, разрабатываются на основе соотношений и методов теорий упругости и термоупругости с использованием выражений, учитывающих влияние на свойства указанных конструкций воздействия корпускулярного космического излучения.

В качестве тел отсчета для выполнения математического моделирования колебаний УОК и УЭК рационально выбрать их недеформированные состояния. Системы координат для определения параметров колебательных движений корректно задать в зависимости от геометрических форм и габаритных размеров перечисленных элементов космического аппарата. Например, НДС прямолинейных стержней, плоских пластин, весьма пологих стержней, пластин и оболочек описывают в декартовых прямоугольных координатах. Для разработки систем уравнений, предназначенных для решения прикладных задач, связанных с определением форм и параметров колебаний стержней в виде полуколец, выпуклых пластин и оболочек, применяют ортогональные и неортогональные криволинейные системы координат.

Важно подчеркнуть, что системы отсчета, представляющие собой недеформированные состояния упругих конструкций, «мысленно» снабженные «часами», и заданные в них системы координат являются неинерциальными, так как они не удовлетворяют ограничениям (1). Указанное обстоятельство обусловлено необходимостью изменения положений УЭК относительно их узлов крепления к электромеханическим приводным устройствам, а также необходимостью управления положением КА относительно его центра масс на этапе летной эксплуатации.

Для определения параметров угловых движений выносных элементов космического аппарата рационально для каждой конструкции задать декартову ортогональную неинерциальную систему координат (НСК), точка отсчета абсцисс, ординат и аппликат которой совмещена с узлом крепления УЭК к ЭМПУ. «Построение» указанных НСК корректно выполнить в НСО, телами отсчета которых являются электромеханические приводные устройства КА.

Для выполнения математического моделирования изменения ориентации космического аппарата целесообразно задать НСК, имеющую $\mathbf{Q}(t) = const,\ \boldsymbol{\omega}_O(t) = 0$ и начало координат в совпадающей с центром масс КА вершине репера собственной системы отсчета. Телом отсчета ССО является монолитная жесткая конструкция, расположенная во внутренней полости упругой оболочки корпуса космического аппарата.

Уравнения, описывающие трансляционные движения КА, разрабатываются с использованием базовой ИСК, заданной в базовой НСО.

На этапе летной эксплуатации космических аппаратов для качественного выполнения ими программ полетов необходимо реализовать эффективное управление трансляционными и спинорными движениями, а также обеспечить демпфирование колебаний выносных крупногабаритных УЭК. Как следствие, математические модели динамики указанных технических устройств должны корректно описывать совершаемые аппаратами движения с учетом взаимосвязанности параметров, задающих каждый вид движения в отдельности, что сопряжено с необходимостью использования при разработке указанных моделей большого количества систем отсчета и систем координат.

«Никакие операции между величинами, определенными в разных системах отсчета, невозможны» [5, с. 246]. Для формирования корректного математического описания динамики КА должны быть использованы методики замен систем отсчета и систем координат, приведенные в работе [5], при помощи которых обеспечивается объективность физических величин, задающих в определенный момент времени конфигурации и состояния элементов космического аппарата.

В соответствии с основными положениями механики, математические модели, описывающие движения механических систем, должны удовлетворять строгому принципу материальной объективности, при котором к сравнению допускаются только инерциальные системы отсчета [Там же, с. 253-263].

В данной статье впервые обоснована необходимость использования для разработки уравнений динамики КА НСО совместно с ИСК и неинерциальными системами координат. Как следствие, для математических описаний, предназначенных для получения решений прикладных задач, связанных с управлением космическими аппаратами, должен выполняться расширенный принцип материальной объективности, при котором к сравнению допускаются любые системы отсчета.

Приведение физических величин, задающих различные виды движения КА, к объективным достигается за счет их «переносов» из систем отсчета и из систем координат, в которых они определены, в базовую ИСК.

Пусть параметры, описывающие конфигурацию и состояние материального тела-точки T, заданы в L системе отсчета. Например, для получения решения какой-либо прикладной задачи указанные параметры необходимо определить относительно системы отсчета L_*. Будем полагать, что математическое время в обеих системах отсчитывается одинаково и фиксируется при помощи «часов». Математическая формализация методики перехода от одних отсчетных координат к другим имеет следующий вид [Там же, с. 245-252]:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}_T(t) = \mathbf{R}_O(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{R}}_T(t);\\
&\mathbf{V}_T(t) = \mathbf{V}_O(t) + \boldsymbol{\omega}_O(t)\times\left[\mathbf{R}_T(t) - \mathbf{R}_O(t)\right] + \mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{V}}_T(t);\\
&\mathbf{W}_T(t) = \mathbf{W}_O(t) + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}_O(t)}{dt}\times\mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}_O(t)\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{\Omega}_O(t)\right]\cdot\left[\mathbf{R}_T(t) - \mathbf{R}_O(t)\right] +\\
&+2\cdot\boldsymbol{\omega}_O(t)\times\mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{V}}_T(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{W}}_T(t),
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $\mathbf{R}_O(t)$ – радиус-вектор, определяющий положение вершины репера L-системы относительно вершины репера L_*-системы; $\mathbf{Q}(t)$ – тензор поворота системы отсчета L относительно системы L_*; $\tilde{\mathbf{R}}_T(t)$ – радиус-вектор, задающий положение материального тела-точки T в системе L_* так, как оно определено в L-системе; $\mathbf{V}_O(t)$ – вектор линейной скорости L-системы относительно системы L_*; $\boldsymbol{\omega}_O(t)$ – вектор левой угловой скорости системы отсчета L относительно L_*-системы; $\tilde{\mathbf{V}}_T(t)$ – вектор линейной скорости, при помощи которого описывается интенсивность изменения положения материального тела-точки T в системе L_* так, как указанная физическая величина задана в L-системе; $\mathbf{W}_O(t)$ – вектор линейного ускорения системы отсчета L относительно системы L_*; $\tilde{\mathbf{W}}_T(t)$ – вектор линейного ускорения, при помощи которого описывается интенсивность изменения вектора линейной скорости материального тела-точки T в системе отсчета L_* так, как указанная физическая величина задана в L-системе; $\mathbf{E}$ – единичный тензор второго ранга; $\boldsymbol{\Omega}_O(t)$ – вектор правой угловой скорости системы отсчета L относительно L_*-системы; $\mathbf{R}_T(t)$, $\mathbf{V}_T(t)$, $\mathbf{W}_T(t)$ – «перенесенные» в систему отсчета L_* радиус-вектор, задающий положение материального тела-точки T, вектор линейной скорости указанного тела и, соответственно, его вектор линейного ускорения.

Соотношения (3) целесообразно использовать при разработке математической модели динамики КА для составления выражений, интегралами от которых описываются движения точек УЭК и УОК в заданных системах координат.

Пусть абсолютно твердое тело совершает трансляционное движение, параметры которого заданы относительно системы отсчета L. Например, для получения решения какой-либо прикладной задачи необходимо выполнить замену указанной «конструкции» системой отсчета L_*. Примем допущение о равноправности «часов» в обеих системах, в соответствии с которым математическое время по указанным приборам отсчитывается одинаково. Математическая формализация методики перехода от одних отсчетных координат к другим для описания трансляционного движения абсолютно твердого тела представляет собой зависимости вида:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_O(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{R}}_Q(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{P}}(t)\cdot\left(\tilde{\mathbf{r}}_S - \tilde{\mathbf{r}}_Q\right);\\
&\mathbf{V}_S(t) = \mathbf{V}_O(t) + \mathbf{S}_O(t)\cdot\left[\mathbf{R}_Q(t) - \mathbf{R}_O(t)\right] + \mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{V}}_Q(t) +\\
&+\left[\mathbf{S}_O(t) + \tilde{\mathbf{S}}_r(t)\right]\cdot\left[\mathbf{R}_S(t) - \mathbf{R}_Q(t)\right];\\
&\mathbf{W}_S(t) = \mathbf{W}_O(t) + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}_O(t)}{dt}\times\mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}_O(t)\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{\Omega}_O(t)\right]\cdot\left[\mathbf{R}_Q(t) - \mathbf{R}_O(t)\right] +\\
&+2\cdot\boldsymbol{\omega}_O(t)\times\mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{V}}_Q(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\mathbf{W}}_Q(t) + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}_O(t)}{dt}\times\mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}_O(t)\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{\Omega}_O(t)\right]\cdot\\
&\cdot\left[\mathbf{R}_S(t) - \mathbf{R}_Q(t)\right] + 2\cdot\left[\boldsymbol{\omega}_O(t)\times\mathbf{Q}(t)\right]\cdot\left[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t)\times\tilde{\mathbf{P}}(t)\right]\cdot\left[\tilde{\mathbf{r}}_S - \tilde{\mathbf{r}}_Q\right] +\\
&+\mathbf{Q}(t)\cdot\left[\frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t)}{dt}\times\mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t)\times\mathbf{E}\times\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_C(t)\right]\cdot\mathbf{Q}^T(t)\cdot\left[\mathbf{R}_S(t) - \mathbf{R}_Q(t)\right],
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_S$ – радиус-вектор, задающий отсчетное положение произвольно выбранной точки S абсолютно твердого тела в системе отсчета L_* так, как оно определено в L-системе; $\tilde{\mathbf{r}}_Q$ – радиус-вектор, задающий отсчетное положение выбранного в абсолютно твердом теле полюса Q в L_*-системе так, как оно определено в системе отсчета L; $\mathbf{R}_S(t)$ – «перенесенный» в L_*-систему радиус-вектор, задающий актуальное положение произвольно выбранной точки S абсолютно твердого тела; $\mathbf{R}_Q(t)$ – «перенесенный» в систему отсчета L_* радиус-вектор, задающий актуальное положение выбранного в абсолютно твердом теле полюса Q; $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ – тензор поворота абсолютно твердого тела, являющийся тензором второго ранга, заданный в L_*-системе так, как он определен в системе отсчета L; $\tilde{\mathbf{R}}_Q(t)$ – радиус-вектор, задающий актуальное положение выбранного в абсолютно твердом теле полюса Q в L_*-системе так, как оно определено в системе отсчета L; $\mathbf{V}_S(t)$ – «перенесенный» в систему L_* вектор линейной скорости произвольно выбранной в абсолютно твердом теле точки S; $\mathbf{S}_O(t)=\dfrac{d\mathbf{Q}(t)}{dt}\cdot\mathbf{Q}^T(t)$ – левый тензор спина L-системы относительно системы отсчета L_*; $\tilde{\mathbf{V}}_Q(t)$ – вектор линейной скорости выбранного в абсолютно твердом теле полюса Q, заданный в системе L_* так, как он определен в L-системе; $\tilde{\mathbf{S}}_r(t)=\tilde{\mathbf{P}}^T(t)\cdot\dfrac{d\tilde{\mathbf{P}}(t)}{dt}$ – правый тензор спина абсолютно твердого тела, заданный в системе отсчете L_* так, как он определен в системе L; $\mathbf{W}_S(t)$ – «перенесенный» в L_*-систему вектор линейного ускорения произвольно выбранной в абсолютно твердом теле точки S; $\tilde{\mathbf{W}}_Q(t)$ – вектор линейного ускорения выбранного в абсолютно твердом теле полюса Q, заданный в системе отсчета L_* так, как он определен в системе L; $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t)$ – вектор левой угловой скорости абсолютно твердого тела, заданный в L_*-системе так, как он определен в системе отсчета L; $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_C(t)$ – вектор правой угловой скорости абсолютно твердого тела, заданный в системе отсчета L_* так, как он определен в системе L; $\mathbf{Q}^T(t)$ – транспонированный тензор поворота L-системы относительно системы отсчета L_*; $\tilde{\mathbf{P}}^T(t)$ – транспонированный тензор поворота абсолютно твердого тела, являющийся тензором второго ранга, заданный в L_*-системе так, как он определен в системе L.

Выражения (4) рационально использовать при выполнении математического моделирования динамики КА для разработки уравнений, описывающих трансляционные движения жесткой монолитной конструкции, расположенной во внутренней полости УОК. Вследствие наличия механических связей между элементами космического аппарата указанные уравнения являются математической формализацией поступательных движений центра масс КА как технического устройства в целом.

При разработке соотношений динамики космического аппарата совместно с выражениями (3) и (4) необходимо использовать математическую формализацию методики замен систем отсчета для описания спинорного движения абсолютно твердого тела.

Воспользуемся ранее введенными системами L и L_*, снабженными одинаковыми «часами» для отсчета математического времени. Зависимость для вектора левой угловой скорости, при помощи которой выполняется переход от отсчетных координат L-системы к координатам системы L_* при описании вращательного движения абсолютно твердого тела, имеет вид [Там же, с. 252]:

$$\boldsymbol{\omega}_C(t)=\boldsymbol{\omega}_O(t)+\mathbf{Q}(t)\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\omega}_C(t)$ – «перенесенный» в систему отсчета L_* вектор левой угловой скорости абсолютно твердого тела.

Уравнение (5) целесообразно использовать при выполнении математического моделирования динамики КА для разработки выражений, описывающих движения технического устройства относительно его центра масс и вращательные движения выходных валов роторов ЭМПУ, обеспечивающих перевод УЭК из транспортных положений в рабочие, управление их ориентациями в космическом пространстве и формирование демпфирующих воздействий при реализации функций ЛСГК.

Отметим, что вращательные движения способны совершать не только элементы КА, которые правомерно считать абсолютно твердыми телами, но и тела-точки, получившие название «односпиновые частицы», что кардинально отличает механику Л. Эйлера от механики И. Ньютона и указывает на неполноту последней. Как следствие, при разработке математических моделей НДС выносных упругих элементов КА, основанных на гипотезе, в соответствии с которой указанные конструкции состоят из односпиновых частиц, необходимо для выполнения замен систем отсчета применять соотношение (5). Спинорные движения тел-точек, впервые введенные в механику Л. Эйлером, представляют практическую ценность, в частности, для теоретического исследования колебательного движения УЭК космического аппарата. Изгибные колебания упругой тонкостенной конструкции сопровождаются изменениями угловых положений ее поперечных сечений, заданных векторами полных (суммарных) поворотов. Каждое из указанных сечений, выделенных в объеме выносного элемента КА, совершает вращательное движение. Как правило, для разработки математических моделей НДС УЭК космического аппарата принимается гипотеза идеальной упругости конструкции, в соответствии с которой одним из основных свойств идеально упругого тела является его сплошность. Жесткие связи между телами-точками выносного элемента КА и правомерность наделения его свойством сплошности являются обоснованием наличия спинорных движений тел-точек упругой конструкции при выполнении ее поперечными сечениями поворотов в процессе совершения изгибных колебаний. Физическими величинами, использующимися в математических моделях НДС УЭК космического аппарата, совместно с вращательными движениями поперечных сечений упругой конструкции задаются изменения угловых положений односпиновых частиц, из которых состоит указанное тело. При выполнении замен систем отсчета на основе соотношения (5) обеспечивается объективность векторов левых угловых скоростей, описывающих совместно со спинорными движениями материальных тел-точек выносного элемента КА вращательные движения его поперечных сечений.

Зависимости (3), (4) и (5) правомерно применять по отношению к любым системам отсчета. Для перехода от отсчетных координат одной инерциальной системы отсчета к координатам другой ИСО указанные выражения преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_T(t)=\mathbf{R}_O(t)+\mathbf{Q}\cdot\tilde{\mathbf{R}}_T(t);\\
&\mathbf{V}_T(t)=\mathbf{V}_O+\mathbf{Q}\cdot\tilde{\mathbf{V}}_T(t);\\
&\mathbf{W}_T(t)=\mathbf{Q}\cdot\tilde{\mathbf{W}}_T(t);\\
&\mathbf{R}_S(t)=\mathbf{R}_O(t)+\mathbf{Q}\cdot\tilde{\mathbf{R}}_Q(t)+\mathbf{Q}\cdot\tilde{\mathbf{P}}(t)\cdot\left(\tilde{\mathbf{r}}_S-\tilde{\mathbf{r}}_Q\right);\\
&\mathbf{V}_S(t)=\mathbf{V}_O+\mathbf{Q}\cdot\tilde{\mathbf{V}}_Q(t)+\tilde{\mathbf{S}}_r(t)\cdot\left[\mathbf{R}_S(t)-\mathbf{R}_Q(t)\right];\\
&\mathbf{W}_S(t)=\mathbf{Q}\cdot\tilde{\mathbf{W}}_Q(t)+\mathbf{Q}\cdot\left[\frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t)}{dt}\times\mathbf{E}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t)\times\mathbf{E}\times\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_C(t)\right]\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\\
&\cdot\left[\mathbf{R}_S(t)-\mathbf{R}_Q(t)\right];\\
&\boldsymbol{\omega}_C(t)=\mathbf{Q}\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(t).
\end{aligned}\tag{6}$$

Важно подчеркнуть, что системы отсчета и декартовые ортогональные системы координат являются геометрически эквивалентными «конструкциями», имеющими принципиально разные физические смыслы в механике. Однако вследствие их геометрической эквивалентности методику замен систем отсчета корректно использовать для выполнения переходов от системы координат, заданной в одной системе отсчета, к координатам, представляющим собой «конструкцию», «построенную» в другой системе отсчета.

Для получения решений некоторых прикладных задач требуется при помощи зависимостей (2) выполнить переход от базовых заданных координат к базовым отсчетным координатам. Например, реализация указанной операции необходима для определения параметров, описывающих в какой-либо момент времени конфигурацию и состояние КА относительно заданной области поверхности планеты Земля. Отметим, что для реализации «переносов» физических величин, задающих динамику космического аппарата относительно базовой ИСК, в базовую НСО вследствие геометрической эквивалентности указанных «конструкций» правомерно использовать методику перехода от одних отсчетных координат к другим.

Многие физические величины зависят от выбора системы отсчета, и ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат в рамках одной системы отсчета [5, с. 31; 6, с. 68]. При разработке математической модели, предназначенной для получения решений прикладных задач, связанных с управлением КА, возникает необходимость в выполнении перехода от одних координат к другим в масштабе одной системы отсчета. Математическая формализация методики замен систем координат в пределах одной системы отсчета представляет собой зависимости вида:

$$\begin{aligned}
&x_1=x_1\left[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\right];\ y_1=y_1\left[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\right];\\
&z_1=z_1\left[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\right];\\
&x=x\left[x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t),\ t\right];\ y=y\left[x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t),\ t\right];\\
&z=z\left[x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t),\ t\right],
\end{aligned}\tag{7}$$

где $x(t),\ y(t),\ z(t),\ x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t)$ – координаты, заданные в выбранной системе отсчета.

Соотношения (7) целесообразно использовать для формирования объективного и корректного математического описания динамики космического аппарата, параметры колебаний УОК и УЭК которого рационально определять в криволинейных системах координат.

Теоретические исследования НДС элементов КА базируются на понятии «неинерциальная система отсчета», представляющая собой недеформированное состояние упругого тела, «мысленно» снабженное «часами». Указанная НСО определена отсчетными координатами, которые «…не подлежат каким-либо заменам» [5, с. 29]. Деформирование УОК и УЭК космического аппарата сопровождается изменениями форм и размеров осей их систем отсчета. Как следствие, переход от заданных криволинейных координат к отсчетным в процессе совершения элементами КА колебательных движений не представляется возможным. Для решения поставленной проблемы целесообразно задать в выбранной неинерциальной системе отсчета геометрически эквивалентную ей декартовую ортогональную НСК, оси и начало координат которой в отсчетный (начальный) момент времени совпадают с осями и соответственно с вершиной репера НСО. При деформировании упругого элемента КА «сконструированная» система координат не будет претерпевать изменений формы и размеров. Как следствие, для реализации в процессе разработки математической модели движений космического аппарата «переносов» в базовую ИСК физических величин, описывающих колебательные движения упругих элементов КА и определенных в криволинейных координатах, необходимо выполнить следующие операции:

- совершить с использованием методики замен систем координат, заданных в одной системе отсчета, переходы от криволинейных НСК к декартовым ортогональным неинерциальным системам координат;
- реализовать при помощи методики перехода от одних отсчетных координат к другим замены декартовых прямоугольных НСК, заданных в НСО и представляющих собой недеформированные состояния

упругих элементов космического аппарата, «мысленно» снабженные «часами», базовой ИСК, «построенной» в выбранной НСО.

Важно подчеркнуть, что для выполнения перехода от декартовой прямоугольной системы координат к другой одноименной «конструкции» в масштабе одной системы отсчета правомерно применять методику замен отсчетных координат, что обосновано геометрической эквивалентностью декартовой ортогональной системы координат и какой-либо системы отсчета.

В заключение приведем законы, в соответствии с которыми при реализации замены системы отсчета преобразуются объективные физические величины, представляющие собой скаляры, векторы и тензоры второго ранга. Значения объективных скалярных физических величин не изменяются при переходе от одних отсчетных координат к другим [Там же, с. 253]:

$$m = \tilde{m}, \tag{8}$$

где m, $\tilde{m}$ – значения скаляра в одной и, соответственно, в другой системах отсчета.

Классическим примером объективной скалярной физической величины является масса тела.

Объективные векторы при выполнении замены отсчетных координат изменяются в соответствии с выражением вида [Там же, с. 254]:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t), \tag{9}$$

где $\mathbf{R}(t)$, $\tilde{\mathbf{R}}(t)$ – значения векторной физической величины, определенные в одних и соответственно в других отсчетных координатах; $\mathbf{Q}(t)$ – тензор поворота одной системы отсчета относительно другой.

В качестве примера объективной векторной физической величины приведем вектор, задающий в выбранной системе отсчета положение материального тела-точки относительно другого одноименного объекта. Математическая формализация указанного вектора представляет собой следующее выражение:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}_S(t) - \mathbf{R}_Q(t), \tag{10}$$

где $\mathbf{R}_S(t)$ – радиус-вектор, задающий положение материального тела-точки S относительно выбранной системы отсчета; $\mathbf{R}_Q(t)$ – радиус-вектор, при помощи которого определено положение материального тела-точки Q относительно выбранной системы отсчета; $\mathbf{U}(t)$ – вектор, задающий в выбранной системе отсчета положение материального тела-точки S относительно материального тела-точки Q.

При выполнении перехода от одних отсчетных координат к другим вектор $\mathbf{U}(t)$ с учетом зависимости (9) изменяется по следующему закону:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{U}}(t). \tag{11}$$

Уравнение, эквивалентное соотношению (11), имеет вид [Там же, с. 248]:

$$\left[\mathbf{R}_S(t) - \mathbf{R}_Q(t)\right] = \mathbf{Q}(t) \cdot \left[\tilde{\mathbf{R}}_S(t) - \tilde{\mathbf{R}}_Q(t)\right]. \tag{12}$$

Объективные тензоры второго ранга при выполнении замены системы отсчета преобразуются в соответствии с выражением [Там же, с. 263]:

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t), \tag{13}$$

где $\mathbf{N}(t)$, $\tilde{\mathbf{N}}(t)$ – значения тензора второго ранга, определенные в одних и, соответственно, в других отсчетных координатах; $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{Q}^T(t)$ – тензор и, соответственно, транспонированный тензор поворота одной системы отсчета относительно другой.

В качестве примера объективного тензора второго ранга отметим тензор инерции абсолютно твердого тела.

Важно подчеркнуть, что в процессе разработки математической модели динамики КА возникает необходимость в использовании совместно с объективными скалярами, векторами и тензорами второго ранга необъективных физических величин, к которым, например, относится его кинетическая энергия, являющаяся скалярной функцией векторного аргумента, и, как следствие, ее значение зависит от выбора системы отсчета. Возможность формирования корректного математического описания движений космического аппарата с использованием необъективных физических величин обеспечивается применением в процессе его составления методики перехода от одних отсчетных координат к другим.

Уравнения Лагранжа второго рода и приведенные в данной статье новые теоретические аспекты математического моделирования динамики КА совместно с методиками замен систем отсчета и систем координат представляют собой основу процесса разработки объективных математических моделей, описывающих движения указанных технических устройств с учетом упругости оболочек корпусов аппаратов и выносных крупногабаритных элементов. Алгоритмы формирования управляющих воздействий для исполнительных органов СУД КА, составленные на базе указанных математических моделей, в совокупности с предложенным в работах [2; 7, с. 494-497] методом эффективного управления космическими аппаратами, имеющими УОК и УЭК с ЛСГК, обеспечивают высокую производительность КА и качество решений целевых задач, выполняемых указанными техническими устройствами в космосе и из космоса.

Список литературы

1. **Артюхин Ю. П., Каргу Л. И., Симаев В. Л.** Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. М.: Наука, 1979. 295 с.
2. **Атамасов В. Д., Дементьев И. И.** Метод решения задачи управления ориентацией современных космических аппаратов // Труды четвертой научно-технической конференции молодых ученых и специалистов ФГУП «КБ "Арсенал"». СПб., 2013. С. 34-36.
3. **Голдстейн Г.** Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 413 с.
4. **Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К.** Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
5. **Жилин П. А.** Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 275 с.
6. **Жилин П. А.** Рациональная механика сплошных сред: учебное пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.
7. **Сапего М. К., Тестоедов Н. А., Атамасов В. Д., Бабук В. А., Белов В. П., Бурылов Л. С., Романов А. В.** Теория проектирования сложных технических систем космического базирования. СПб.: НПО «Профессионал», 2012. 560 с.

METHOD OF DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELS OF SPACECRAFT DYNAMICS

Dement'ev Il'ya Igorevich
Arsenal Machine-Building Plant Open JSC, St. Petersburg
arsenal@mzarsenal.spb.ru

In the article new theoretical aspects of the mathematical modeling of the dynamics of spacecraft with account of the elasticity casing of spacecraft hulls and bulky detail sections are presented and the method of effective spacecraft control is given. This method and the formulated theoretical aspects in the aggregate provide high performance of spacecraft and quality of the solutions of targeted tasks performed by them in space and out of space. The work contains the ground for the necessity to use Lagrange equations of the second kind together with the methods of the substitution of reference frames and coordinate systems for the development of mathematical models describing the movements of spacecraft.

Key words and phrases: spacecraft; reference frame; spacecraft control; coordinate system; bulky elastic section of spacecraft construction; local damping system; elastic casing of spacecraft hull.

УДК 629.7.015(083.3)
Технические науки

В статье представлена новая трехмерная математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние (НДС) композитного ортогонально анизотропного выносного упругого элемента конструкции (УЭК) космического аппарата (КА). Разработанная система дифференциальных уравнений в частных производных, учитывающая деформации поперечных сдвигов, возникающие при изменении НДС композитной конструкции, предназначена для прогнозирования форм и параметров колебаний крупногабаритных тонкостенных УЭК, подвергающихся на этапе летной эксплуатации КА воздействиям механических и температурных нагрузок.

Ключевые слова и фразы: космический аппарат; композиционный материал; крупногабаритный композитный выносной упругий элемент конструкции; управление космическим аппаратом; локальная система гашения колебаний; форма и параметры колебаний; математическая модель напряженно-деформированного состояния упругого тела.

Дементьев Илья Игоревич
Устинов Александр Николаевич
Открытое акционерное общество «Машиностроительный завод "Арсенал"», г. Санкт-Петербург
arsenal@mzarsenal.spb.ru

Атамасов Владимир Дмитриевич, д.т.н.
Голованова Василина Валерьевна
Изотов Сергей Николаевич
Кислицкий Михаил Иванович, к.т.н.
Федеральное государственное унитарное предприятие «Конструкторское бюро "Арсенал" имени М. В. Фрунзе»
kbarsenal@kbarsenal.ru

ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУПНОГАБАРИТНОГО КОМПОЗИТНОГО ВЫНОСНОГО ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА©

В XXI веке перед космонавтикой поставлены следующие задачи [13, с. 15]: освоение околоземного пространства, выполнение полетов на имеющиеся в Солнечной системе планеты, создание обитаемых баз на