Шармин Валентин Геннадьевич, Шармина Тамара Николаевна

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОЙ ОГИБАЮЩЕЙ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях, при которых существует устойчивая огибающая трехпараметрического семейства поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве. Данная статья является продолжением работ авторов, посвященных огибающим r-параметрических семейств поверхностей в многомерных евклидовых пространствах.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2015. № 1 (91). C. 127-131. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2015/1/

8. **Орлов Е. М., Соколова О. Н.** Категория эффективности в системе здравоохранения // Фундаментальные исследования. 2010. № 4. С. 70-75.
9. **Стародубов В. И., Тихомиров А. В.** Перспективы существования учреждений в здравоохранении // Менеджер здравоохранения. 2004. № 1. С. 4-7.
10. **Тельнова Е. А.** Качество оказания медицинской помощи как основная задача системы здравоохранения // Вестник Росздравнадзора. 2010. № 5. С. 4-9.
11. **Тергушева А. Н., Чудинова Н. Г.** Предпосылки создания системы медицинского кадастра // Архитектура, строительство, землеустройство и кадастры на Дальнем Востоке в XXI веке: междунар. науч.-практ. конф. (г. Комсомольск-на-Амуре, 23-25 апреля 2014 г.): материалы и доклады. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2014.
12. **Тергушева А. Н., Чудинова Н. Г.** Роль кадастра Министерства здравоохранения и социального развития в паспортизации медицинских учреждений // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2013. Ч. 2. Материалы докладов 43-й научно-технической конференции аспирантов и студентов – 2013. С. 342-343.
13. **Токарев К. Е.** Оценка эффективности оказания медицинских услуг в условиях необходимости повышения их качества // Бизнес. Образование. Право: вестник Волгоградского института бизнеса. 2011. № 4 (17). С. 59-62.
14. **Чавпецов В. Ф., Тимофеев И. В., Грицак О. В.** О состоянии системы управления качеством медицинской помощи в Санкт-Петербурге // Менеджмент качества в сфере здравоохранения и социального развития. 2009. № 6. С. 34-38.
15. **Чудинова Н. Г., Тергушева А. Н.** Медицинский кадастр как инструмент интеграции информации в системе здравоохранения // Проблемы демографии, медицины и здоровья населения России: история и современность: сборник статей XI Международной научно-практической конференции / МНИЦ ПГСХА. Пенза: РИО ПГСХА, 2013. С. 116-118.
16. **Чудинова Н. Г., Тергушева А. Н.** Теоретические основы медицинского кадастра // Актуальные научные вопросы и современные образовательные технологии / Министерство образования и науки РФ. Тамбов: ТРОО «Бизнес – Наука – Общество», 2013. Ч. 4. Сб. науч. тр. С. 155-156.
17. **http://itm.consef.ru/main.mhtml?Part=84&PubID=600** (дата обращения: 12.11.2014).
18. **http://www.1cps.ru/news/2013/ispolzovanie_gis_v_med.html** (дата обращения: 12.11.2014).
19. **https://ru.wikipedia.org/wiki/ESRI** (дата обращения: 12.11.2014).

MEDICAL CADASTRE AS TOOL FOR EFFECTIVE GOVERNANCE IN PUBLIC HEALTH SYSTEM

Chudinova Natal'ya Gennad'evna, Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor
Tergusheva Anastasiya Nikolaevna
Komsomolsk-on-Amur State Technical University
kkig@knastu.ru; nastya_tergusheva@mail.ru

The article reveals the necessity to create medical cadastre – an integrated tool for collecting, storing, processing and presenting information in public health system, which will monitor the quality of medical care and accelerate the integration of information in the complex structure of public health. The authors present the theoretical bases of medical cadastre, study the main issues related to improving the quality of medical care and evaluating the efficiency of medical institutions, and consider prerequisites for the creation of multi-layer electronic database with cloud data store of medical cadastre.

Key words and phrases: quality of medical care; efficiency of public health system; medical cadastre; integration of information; electronic database; geoinformational systems.

УДК 514.75
Физико-математические науки

В работе сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях, при которых существует устойчивая огибающая трехпараметрического семейства поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве. Данная статья является продолжением работ авторов, посвященных огибающим r-параметрических семейств поверхностей в многомерных евклидовых пространствах.

Ключевые слова и фразы: огибающая; семейство поверхностей; евклидово пространство; гиперповерхность; достаточные условия.

Шармин Валентин Геннадьевич, к. ф.-м. н., доцент
Шармина Тамара Николаевна, к. ф.-м. н., доцент
Тюменский государственный университет
sharmin@utmn.ru

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОЙ ОГИБАЮЩЕЙ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ©

Как показано в работе [1], устойчивая огибающая существует для r-параметрического семейства 2-поверхностей в E^{n+1} при $r = n-2$, $r = n-1$ и $r = n$. Огибающая трехпараметрического семейства 2-поверхностей в E^4 является гиперповерхностью [Там же].

Дадим следующее определение [Там же].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Огибающей (участком огибающей) семейства двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве

$\vec{r} = \vec{r}(u,v,\phi,\psi,\eta) \in C^1$

будет называться регулярная гиперповерхность

$\vec{\rho}(\lambda,\mu,\tau) = (x_1(\lambda,\mu,\tau),\ x_2(\lambda,\mu,\tau), x_3(\lambda,\mu,\tau), x_4(\lambda,\mu,\tau)) \in C^1$,

для которой при некотором законе прикрепления

$u = u(\lambda,\mu,\tau), v = v(\lambda,\mu,\tau), \phi = \phi(\lambda,\mu,\tau)$,

$\psi = \psi(\lambda,\mu,\tau), \eta = \eta(\lambda,\mu,\tau) \in C^1$

выполняются следующие условия:

- для каждого набора (λ,μ,τ) поверхность

$\vec{r}\,(u(\lambda,\mu,\tau), v(\lambda,\mu,\tau), \phi(\lambda,\mu,\tau), \psi(\lambda,\mu,\tau), \eta(\lambda,\mu,\tau))$ касается гиперповерхности $\vec{\rho}(\lambda,\mu,\tau)$;

- для любой точки (λ,μ,τ) можно найти окрестность, в которой не будет существовать таких функций $\Phi(t,s), \Psi(t,s), \Omega(t,s) \in C^1$, что

$\phi(\lambda,\mu,\tau) = \Phi(\psi(\lambda,\mu,\tau), \eta(\lambda,\mu,\tau))$,

$\psi(\lambda,\mu,\tau) = \Psi(\phi(\lambda,\mu,\tau), \eta(\lambda,\mu,\tau))$,

$\eta(\lambda,\mu,\tau) = \Omega(\phi(\lambda,\mu,\tau), \psi(\lambda,\mu,\tau))$.

ТЕОРЕМА. Пусть трехпараметрическое семейство 2-поверхностей в E^4 имеет гладкость C^2:

$$\vec{r}(u,v,\phi,\psi,\eta) = (x(u,v,\phi,\psi,\eta), y(u,v,\phi,\psi,\eta), z(u,v,\phi,\psi,\eta), t(u,v,\phi,\psi,\eta)) \in C^2, \tag{1}$$

$a < u < b,\ c < v < d,\ \phi_1 < \phi < \phi_2,\ \psi_1 < \psi < \psi_2,\ \eta_1 < \eta < \eta_2$ и в точке $(u_0, v_0, \phi_0, \psi_0, \eta_0)$ выполнены следующие условия:

$$f = \frac{D(x,y,z,t)}{D(u,v,\phi,\psi)} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_\phi, \vec{r}_\psi) = 0; \quad g = \frac{D(x,y,z,t)}{D(u,v,\phi,\eta)} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_\phi, \vec{r}_\eta) = 0; \tag{2}$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_\phi] \neq \vec{0}; \tag{3}$$

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{4}$$

$$h = \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_\phi & f_\psi & f_\eta \\ g_u & g_v & g_\phi & g_\psi & g_\eta \\ \vec{r}_u\vec{r}_u & \vec{r}_u\vec{r}_v & \vec{r}_u\vec{r}_\phi & \vec{r}_u\vec{r}_\psi & \vec{r}_u\vec{r}_\eta \\ \vec{r}_v\vec{r}_u & \vec{r}_v\vec{r}_v & \vec{r}_v\vec{r}_\phi & \vec{r}_v\vec{r}_\psi & \vec{r}_v\vec{r}_\eta \\ \vec{r}_\phi\vec{r}_u & \vec{r}_\phi\vec{r}_v & \vec{r}_\phi\vec{r}_\phi & \vec{r}_\phi\vec{r}_\psi & \vec{r}_\phi\vec{r}_\eta \end{vmatrix} = 0; \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial \phi} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{6}$$

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{D(x,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)} & \dfrac{D(y,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)} & \dfrac{D(z,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)} & \dfrac{D(t,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)} \\ \dfrac{D(x,f,g,h)}{D(u,v,\psi,\eta)} & \dfrac{D(y,f,g,h)}{D(u,v,\psi,\eta)} & \dfrac{D(z,f,g,h)}{D(u,v,\psi,\eta)} & \dfrac{D(t,f,g,h)}{D(u,v,\psi,\eta)} \end{pmatrix} = 2. \tag{7}$$

Тогда найдется окрестность точки $(u_0, v_0, \phi_0, \psi_0, \eta_0)$ ($a_0 < u < b_0,\ c_0 < v < d_0,\ \phi_{1_0} < \phi < \phi_{2_0},\ \psi_{1_0} < \psi < \psi_{2_0},\ \eta_{1_0} < \eta < \eta_{2_0}$), в которой будут справедливы утверждения:

1. Семейство (1) имеет огибающую гиперповерхность с двумерной поверхностью F, состоящей из особых точек огибающей, допускающей задание $\vec{r}(u,v,\phi,\psi,\eta)$ при связях $f=0, g=0, h=0.$ При этом F является регулярной поверхностью.

2. На огибающей гиперповерхности можно так выбрать параметры, что

$$\vec{\rho}(\lambda,\mu,\tau)\in C^2, \begin{cases} [\vec{\rho}_\lambda,\vec{\rho}_\mu,\vec{\rho}_\tau]=\vec{0} на F, \\ [\vec{\rho}_\lambda,\vec{\rho}_\mu,\vec{\rho}_\tau]\neq\vec{0} вне F. \end{cases}$$

3. Каждая из 2-поверхностей трехпараметрического семейства касается огибающей в единственной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о неявных функциях система *f=0* и *g=0* разрешима относительно u и v, т.е.

$$u=u(\phi,\psi,\eta)\in C^1, v=v(\phi,\psi,\eta)\in C^1 \text{ и } \begin{matrix} u_\phi=-\dfrac{\begin{vmatrix} f_\phi & f_v \\ g_\phi & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}, v_\phi=-\dfrac{\begin{vmatrix} f_u & f_\phi \\ g_u & g_\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}, u_\psi=-\dfrac{\begin{vmatrix} f_\psi & f_v \\ g_\psi & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}, \\ v_\psi=-\dfrac{\begin{vmatrix} f_u & f_\psi \\ g_u & g_\psi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}, u_\eta=-\dfrac{\begin{vmatrix} f_\eta & f_v \\ g_\eta & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}, v_\eta=-\dfrac{\begin{vmatrix} f_u & f_\eta \\ g_u & g_\eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}. \end{matrix} \quad (8)$$

Рассмотрим гиперповерхность

$$\vec{\rho}(\phi,\psi,\eta)=\vec{r}(u(\phi,\psi,\eta),v(\phi,\psi,\eta),\phi,\psi,\eta). \quad (9)$$

Покажем, что (9) есть участок огибающей. Найдем направляющие векторы касательной гиперплоскости к $\vec{\rho}(\phi,\psi,\eta)$:

$$\vec{\rho}_\phi=\vec{r}_u u_\phi+\vec{r}_v v_\phi+\vec{r}_\phi, \vec{\rho}_\psi=\vec{r}_u u_\psi+\vec{r}_v v_\psi+\vec{r}_\psi, \vec{\rho}_\eta=\vec{r}_u u_\eta+\vec{r}_v v_\eta+\vec{r}_\eta. \quad (10)$$

Докажем, что $\vec{\rho}(\phi,\psi,\eta)$ – регулярна, т.е. $[\vec{\rho}_\phi,\vec{\rho}_\psi,\vec{\rho}_\eta]\neq 0.$

Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} &\vec{r}_\psi=\alpha_1\cdot\vec{r}_u+\beta_1\cdot\vec{r}_v+\gamma_1\cdot\vec{r}_\phi; \\ &\vec{r}_\eta=\alpha_2\cdot\vec{r}_u+\beta_2\cdot\vec{r}_v+\gamma_2\cdot\vec{r}_\phi. \end{aligned} \quad (11)$$

Умножая скалярно первое уравнение (11) на $\vec{r}_u,\vec{r},_v\vec{r}_\phi$ поочередно, получаем:

$$\begin{aligned} &\vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_u=\alpha_1\cdot\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u+\beta_1\cdot\vec{r}\cdot_v\vec{r}_u+\gamma_1\cdot\vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_u; \\ &\vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_v=\alpha_1\cdot\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v+\beta_1\cdot\vec{r}\cdot_v\vec{r}_v+\gamma_1\cdot\vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_v; \\ &\vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_\phi=\alpha_1\cdot\vec{r}_u\cdot\vec{r}_\phi+\beta_1\cdot\vec{r}\cdot_v\vec{r}_\phi+\gamma_1\cdot\vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_\phi. \end{aligned} \quad (12)$$

Из системы (12) найдем коэффициенты $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, учитывая (3):

$$\begin{gathered} \alpha_1=\frac{\begin{vmatrix} \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_u \\ \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_u \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_\phi \end{vmatrix}}, \beta_1=\frac{\begin{vmatrix} \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_u \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_u \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_\phi \end{vmatrix}}, \\ \gamma_1=\frac{\begin{vmatrix} \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_u \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\psi\cdot\vec{r}_\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_u \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_\phi \end{vmatrix}}, W=\begin{vmatrix} \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_u & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_u \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_v\cdot\vec{r}_\phi & \vec{r}_\phi\cdot\vec{r}_\phi \end{vmatrix}\neq 0. \end{gathered} \quad (13)$$

Аналогично находятся коэффициенты $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$.

С учетом (10) и (11) получаем:

$$\begin{aligned}&\vec{\rho}_\phi=\vec{r}_u u_\phi+\vec{r}_v v_\phi+\vec{r}_\phi,\\&\vec{\rho}_\psi=\vec{r}_u(u_\psi+\alpha_1)+\vec{r}_v(v_\psi+\beta_1)+\gamma_1\vec{r}_\phi,\\&\vec{\rho}_\eta=\vec{r}_u(u_\eta+\alpha_2)+\vec{r}_v(v_\eta+\beta_2)+\gamma_2\vec{r}_\phi.\end{aligned}\tag{14}$$

Найдем $[\vec{\rho}_\phi,\vec{\rho}_\psi,\vec{\rho}_\eta]$.

$$\begin{aligned}&[\vec{\rho}_\phi,\vec{\rho}_\psi,\vec{\rho}_\eta]=[\vec{r}_{u.},\vec{r}_v,\vec{r}_\phi]\cdot(u_\phi(v_\psi+\beta_1)\gamma_2-u_\phi(v_\eta+\beta_2)\gamma_1-\\&-v_\phi(u_\psi+\alpha_1)\gamma_2+v_\phi(u_\eta+\alpha_2)\gamma_1+(u_\psi+\alpha_1)(v_\eta+\beta_2)-\\&-(v_\psi+\beta_1)(u_\eta+\alpha_2))=\frac{h}{WD}\cdot[\vec{r}_{u.},\vec{r}_v,\vec{r}_\phi].\end{aligned}\tag{15}$$

Из (15) следует, что координаты вектора (15) пропорциональны якобианам:

$$\left(\frac{D(y,z,t,f,g)}{D(u,v,\phi,\psi,\eta)},\frac{D(x,z,t,f,g)}{D(u,v,\phi,\psi,\eta)},\frac{D(x,y,t,f,g)}{D(u,v,\phi,\psi,\eta)},\frac{D(x,y,z,f,g)}{D(u,v,\phi,\psi,\eta)}\right).\tag{16}$$

Решим систему $f=0,g=0,h=0$ относительно *u, v, φ*. Это можно сделать, так как выполнено условие (6): $u=U(\psi,\eta),v=V(\psi,\eta),\phi=\Phi(\psi,\eta)$. В результате получим поверхность

$$\vec{R}(\phi,\psi)=\vec{r}(U(\psi,\eta),V(\psi,\eta),\Phi(\psi,\eta),\psi,\eta).\tag{17}$$

Докажем, что (17) является регулярной двумерной поверхностью. Найдем производные вектор-функции (17):

$$\begin{aligned}&\vec{R}_\psi=\vec{r}_u\cdot U_\psi+\vec{r}_v\cdot V_\psi+\vec{r}_\phi\cdot\Phi_\psi+\vec{r}_\psi,\\&\vec{R}_\eta=\vec{r}_u\cdot U_\eta+\vec{r}_v\cdot V_\eta+\vec{r}_\phi\cdot\Phi_\eta+\vec{r}_\eta.\end{aligned}\tag{18}$$

Решая систему

$$\begin{cases}f_u\cdot U_\psi+f_v\cdot V_\psi+f_\phi\cdot\Phi_\psi+f_\psi=0\\g_u\cdot U_\psi+g_v\cdot V_\psi+g_\phi\cdot\Phi_\psi+g_\psi=0\\h_u\cdot U_\psi+h_v\cdot V_\psi+h_\phi\cdot\Phi_\psi+h_\psi=0\end{cases}\tag{19}$$

получаем:

$$U_\psi=-\frac{\begin{vmatrix}f_\psi&f_v&f_\phi\\g_\psi&g_v&g_\phi\\h_\psi&h_v&h_\phi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_u&f_v&f_\phi\\g_u&g_v&g_\phi\\h_u&h_v&h_\phi\end{vmatrix}},V_\psi=-\frac{\begin{vmatrix}f_u&f_\psi&f_\phi\\g_u&g_\psi&g_\phi\\h_u&h_\psi&h_\phi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_u&f_v&f_\phi\\g_u&g_v&g_\phi\\h_u&h_v&h_\phi\end{vmatrix}},\Phi_\psi=-\frac{\begin{vmatrix}f_u&f_v&f_\psi\\g_u&g_v&g_\psi\\h_u&h_v&h_\psi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_u&f_v&f_\phi\\g_u&g_v&g_\phi\\h_u&h_v&h_\phi\end{vmatrix}}.\tag{20}$$

Аналогично находятся U_η,V_η,Φ_η. Из вышесказанного следует, что векторы $\vec{R}_\psi$ и $\vec{R}_\eta$ коллинеарны следующим векторам:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{D(x,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)},\frac{D(y,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)},\frac{D(z,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)},\frac{D(t,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\psi)}\right),\\&\left(\frac{D(x,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\eta)},\frac{D(y,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\eta)},\frac{D(z,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\eta)},\frac{D(t,f,g,h)}{D(u,v,\phi,\eta)}\right).\end{aligned}\tag{21}$$

Из (7) следует, что эти векторы линейно независимы.

Таким образом, пункты 1 и 2 Теоремы доказаны (следует из (15) и (21)).

Докажем пункт 3 Теоремы. Докажем, что каждая из 2-поверхностей трехпараметрического семейства (1) касается огибающей (9) в единственной точке.

Пусть в точке (ϕ_1,ψ_1,η_1) гиперповерхности $\vec{\rho}(\phi,\psi,\eta)$, кроме поверхности $\vec{r}(u,v,\phi_1,\psi_1,\eta_1)$, другая поверхность семейства $\vec{r}(u,v,\phi_1,\psi_1,\eta_1)$ касается огибающей. Рассуждая, как при доказательстве соответствующей теоремы [4], получим:

$$\begin{aligned}&\vec{r}_u\cdot\cos\delta_1+\vec{r}_v\cdot\cos\delta_2+\vec{r}_\phi\cdot\cos\delta_3+\vec{r}_\psi\cdot\cos\delta_4+\vec{r}_\eta\cdot\cos\delta_5=0;\\&\vec{r}_{uu}\cdot\cos\delta_1+\vec{r}_{vu}\cdot\cos\delta_2+\vec{r}_{\phi u}\cdot\cos\delta_3+\vec{r}_{\psi u}\cdot\cos\delta_4+\vec{r}_{\eta u}\cdot\cos\delta_5=0;\\&\vec{r}_{uv}\cdot\cos\delta_1+\vec{r}_{vv}\cdot\cos\delta_2+\vec{r}_{\phi v}\cdot\cos\delta_3+\vec{r}_{\psi v}\cdot\cos\delta_4+\vec{r}_{\eta v}\cdot\cos\delta_5=0;\\&\vec{r}_{u\phi}\cdot\cos\delta_1+\vec{r}_{v\phi}\cdot\cos\delta_2+\vec{r}_{\phi\phi}\cdot\cos\delta_3+\vec{r}_{\psi\phi}\cdot\cos\delta_4+\vec{r}_{\eta\phi}\cdot\cos\delta_5=0.\end{aligned}\tag{22}$$

Легко видеть, что $\cos^2\delta_4+\cos^2\delta_5\neq 0$, так как в противном случае все косинусы обращались бы в ноль, что противоречит (2). Из первого равенства (22) и (11) получаем:

$$\begin{aligned}
&\cos\delta_1 = -\alpha_1\cos\delta_4 - \alpha_2\cos\delta_5;\\
&\cos\delta_2 = -\beta_1\cos\delta_4 - \beta_2\cos\delta_5;\\
&\cos\delta_3 = -\gamma_1\cos\delta_4 - \gamma_2\cos\delta_5.
\end{aligned} \tag{23}$$

Найдем

$$\begin{aligned}
&f_u = (\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi,\vec r_\psi)_u = \alpha_1(\vec r_{uu},\vec r_v,\vec r_\phi,\vec r_u) + \beta_1(\vec r_u,\vec r_{uv},\vec r_\phi,\vec r_v) +\\
&+\gamma_1(\vec r_u,\vec r_v,\vec r_{\phi u},\vec r_\phi) + (\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi,\vec r_{\psi u}) =\\
&[\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi]\cdot(-\alpha_1\cdot\vec r_{uu} - \beta_1\cdot\vec r_{uv} - \gamma_1\cdot\vec r_{\phi u} + \vec r_{\psi u});\\
&f_v = (\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi,\vec r_\psi)_v = [\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi]\cdot(-\alpha_1\cdot\vec r_{uv} - \beta_1\cdot\vec r_{vv} - \gamma_1\cdot\vec r_{\phi v} + \vec r_{\psi v});\\
&g_u = (\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi,\vec r_\eta)_u = [\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi]\cdot(-\alpha_2\cdot\vec r_{uu} - \beta_2\cdot\vec r_{uv} - \gamma_2\cdot\vec r_{\phi u} + \vec r_{\eta u});\\
&g_v = (\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi,\vec r_\eta)_v = [\vec r_u,\vec r_v,\vec r_\phi]\cdot(-\alpha_2\cdot\vec r_{uv} - \beta_2\cdot\vec r_{vv} - \gamma_2\cdot\vec r_{\phi v} + \vec r_{\eta v}).
\end{aligned} \tag{24}$$

Из второго и третьего равенств (22) с учетом (23) получим:

$$\begin{aligned}
&\cos\delta_4\cdot(-\alpha_1\cdot\vec r_{uu} - \beta_1\cdot\vec r_{vu} - \gamma_1\cdot\vec r_{\phi u} + \vec r_{\psi u}) +\\
&+\cos\delta_5\cdot(-\alpha_2\cdot\vec r_{uu} - \beta_2\cdot\vec r_{uv} - \gamma_2\cdot\vec r_{\phi u} + \vec r_{\eta u}) = 0;\\
&\cos\delta_4\cdot(-\alpha_1\cdot\vec r_{uv} - \beta_1\cdot\vec r_{vv} - \gamma_1\cdot\vec r_{\phi v} + \vec r_{\psi v}) +\\
&+\cos\delta_5\cdot(-\alpha_2\cdot\vec r_{uv} - \beta_2\cdot\vec r_{vv} - \gamma_2\cdot\vec r_{\phi v} + \vec r_{\eta v}) = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует

$$\begin{aligned}
&\cos\delta_4\cdot f_u + \cos\delta_5\cdot g_u = 0;\\
&\cos\delta_4\cdot f_v + \cos\delta_5\cdot g_v = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Последнее равенство противоречит (4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вместо условия (5) предположить, что в точке $(u_0, v_0, \phi_0, \psi_0, \eta_0)$ $h \neq 0$ и исключить условия (6) и (7), то можно не только доказать существование регулярной огибающей трехпараметрического семейства двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве, но и доказать ее единственность и единственность закона прикрепления, как в соответствующей теореме [Там же].

Список литературы

1. **Залгаллер В. А.** Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 104 с.
2. **Шармин В. Г.** Достаточные условия существования огибающей n-параметрического семейства кривых в (n+1)-мерном евклидовом пространстве, содержащей регулярную (n-1)-поверхность особых точек // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 6 (25). С. 215-217.
3. **Шармин В. Г.** О строении замкнутой невыпуклой гиперповерхности с биективным сферическим отображением: рукопись депонирована в ВИНИТИ 23.06.82. № 3239-82 Деп. Л.: ЛГПИ, 1982. 19 с.
4. **Шармин В. Г., Шармина Т. Н.** Достаточные условия существования огибающей однопараметрического семейства поверхностей в 4-мерном евклидовом пространстве // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 2 (45). С. 55-57.

ABOUT SUFFICIENT CONDITIONS OF EXISTENCE OF STABLE ENVELOPE OF THREE-PARAMETER FAMILY OF SURFACES IN FOUR-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Sharmin Valentin Gennad'evich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Sharmina Tamara Nikolaevna, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor
Tyumen State University
sharmin@utmn.ru

In this paper the authors formulate and prove a theorem about sufficient conditions, under which a stable envelope of three-parameter family of surfaces exists in four-dimensional Euclidean space. This article is the continuation of the authors' works devoted to the envelopes of *r*-parameter families of surfaces in multidimensional Euclidean spaces.

Key words and phrases: envelope; family of surfaces; Euclidean space; hypersurface; sufficient conditions.