Романов Вадим Николаевич

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Статья посвящена исследованию нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Выполнены прямые расчеты положения нулей при различных значениях аргумента. Исследовано поведение и определено положение характеристических точек (максимумов, минимумов и нулей) рядов, аппроксимирующих дзета-функцию. Показана инвариантность множества нулей относительно преобразований симметрии, а именно, осевой и центральной симметрии. На этой основе предложен способ доказательства гипотезы Римана. Дана интерпретация гипотезы на примере атомной системы с определенными свойствами симметрии ее волновой функции.

УДК 511
Физико-математические науки

Статья посвящена исследованию нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Выполнены прямые расчеты положения нулей при различных значениях аргумента. Исследовано поведение и определено положение характеристических точек (максимумов, минимумов и нулей) рядов, аппроксимирующих дзета-функцию. Показана инвариантность множества нулей относительно преобразований симметрии, а именно, осевой и центральной симметрии. На этой основе предложен способ доказательства гипотезы Римана. Дана интерпретация гипотезы на примере атомной системы с определенными свойствами симметрии ее волновой функции.

Ключевые слова и фразы: простые числа; сумма обратных степеней; дзета-функция Римана; гипотеза Римана; нетривиальные нули дзета-функции; функциональные соотношения для дзета-функции; преобразования симметрии.

Романов Вадим Николаевич, д.т.н., профессор
г. Санкт-Петербург
vromanvpi@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА©

Изучению свойств дзета-функции Римана $\zeta(z)$ посвящено большое число работ [1, с. 1086; 2, с. 610; 3, с. 58]. Здесь и далее $z = x + iy$, xи y – вещественные числа. В [4, с. 91-92] приведены значения функции с шагом 0,1 в интересующем нас интервале $0 \leq x \leq 1$, а также значения ее корней для $y < 100$. Точность расчетов не указана, что снижает ценность приведенных данных. Основной нерешенной проблемой является доказательство гипотезы Римана, которая состоит в утверждении, что все нули дзета-функции в полосе $0 \leq x \leq 1$ находятся на прямой $x = 1/2$. К настоящему времени доказано, что на прямой $x = 1/2$ лежит бесконечное число нулей, и кроме того на концах интервала нули отсутствуют. Настоящая статья посвящена исследованию нетривиальных нулей дзета-функции, обсуждению причин, обусловливающих справедливость гипотезы, и способам ее доказательства. Используем для дзета-функции представление, справедливое при $x > 0$ [Там же, с. 89]:

$$(1 - 2^{1-z})\zeta(z) = \sum_{N=1}^{\infty}(-1)^{N+1}N^{-z} \equiv S(z). \quad (1)$$

Первый множитель в левой части (1) может быть отброшен, так как при $0 < x < 1$ он в нуль не обращается. Таким образом, задача сводится к исследованию нулей суммы ряда, т.е. функции$S(z)$.Используя экспоненциальное представление, получаем

$$S(z) = u + iv = \sum_{N=1}^{\infty}(-1)^{N+1} \cdot exp(-xlnN + 2k\pi y) \cdot exp[-i(ylnN + 2k\pi x)]. \quad (2)$$

Общий множитель $exp(2k\pi y)$ можно не учитывать, и для упрощения расчетов используем главное значение логарифма, полагая $k = 0$, что в нашем случае не снижает общности. Тогда (2) приводится к системе уравнений

$$u = F_1(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty}(-1)^{N+1}A(x, N)B_1(y, N) = 0, \quad (3а)$$

$$v = F_2(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty}(-1)^{N+1}A(x, N)B_2(y, N) = 0, \quad (3б)$$

где $A(x, N) = 1/N^x$; $B_1(y, N) = \cos(ylnN)$;$B_2(y, N) = \sin(ylnN)$.

Таблица 1. *Значения суммы $S(x)$ и дзета-функции $\zeta(x)$ при вещественном $z = x$*

x	$S(x)$	**Ошибка**	**Число членов ряда**	$1/(1-2^{1-x})$	$\zeta(x)$
0,40	0,58328087	0,003906	1048550	-1,93904960	-1,13101054
0,45	0,59415255	0,001995	1000000	-2,15477445	-1,28026473
0,49	0,60238832	0,001148	1000000	-2,35821139	-1,42055898
0,50	0,60439864	0,001	1000000	-2,41421356	-1,45914740
0,51	0,60639269	0,000871	1000000	-2,47252484	-1,49932098
0,55	0,61411205	0,000734	500000	-2,73193995	-1,67771723
0,60	0,62365499	0,000473	350000	-3,12981296	-1,95192346
0,65	0,63300955	0,000249	350000	-3,64218282	-2,30553649
0,70	0,64214318	0,000132	350000	-4,32629967	-2,77810384
0,75	0,65108093	0,0000695	350000	-5,28521351	-3,44110174
0,80	0,65983631	0,0000366	350000	-6,725023959	-4,43741499
0,85	0,66841681	0,0000196	350000	-9,126629718	-6,10039272
0,90	0,67682681	0,0000102	350000	-13,93272617	-9,43004268
0,95	0,68506912	0,0000054	350000	-28,35678887	-19,4263605
0,96	0,68669761	0,0000048	350000	-35,56968648	-24,4256200

Таблица 2. *Изменение положения максимумов функций F_1 и F_2 в зависимости от x*

x	0,4	0,45	0,49	0,5	0,51	0,55	0,6	0,65
y_{11}	11,952	11,9495	11,948	11,947	11,94696	11,944	11,9469	11,9472
$F_1(y_{11})$	2,81603	2,70660	2,62483	2,60504	2,58551	2,50951	2,42069	2,33705
y_{12}	100000,0979	100000,0955	100000,093	100000,092	100000,091	100000,088	100000,082	100000,074
$F_1(y_{12})$	19,50806	14,16015	11,18868	10,58045	10,01742	8,14856	6,47099	5,29306
y_{22}	100000,291	100000,296	100000,300	100000,301	100000,302	100000,307	100000,314	100000,322
$F_2(y_{22})$	18,54156	13,37520	10,49040	9,89778	9,34836	7,51734	5,85785	4,67857
x	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,96	-
y_{11}	11,948	11,9493	11,951	11,953	11,955	11,958	11,9581	-
$F_1(y_{11})$	2,25862	2,18506	2,11607	2,05135	1,99062	1,93364	1,92267	-
y_{12}	100000,064	100000,0523	100000,0375	100000,02	99999,9995	99999,976	99999,972	-
$F_1(y_{12})$	4,45088	3,83727	3,38077	3,03402	2,76489	2,55134	2,51386	-
y_{22}	100000,330	100000,3403	100000,351	100000,364	100000,377	100000,392	100000,395	-
$F_2(y_{22})$	3,82338	3,19004	2,71101	2,34109	2,04968	1,81573	1,77445	-

Примечание. Значения y_{11} соответствуют второму максимуму F_1, а y_{12} и y_{22} – максимумам F_1 и F_2 соответственно при больших значениях y.

Таблица 3. *Изменение положения нулей функций F_1 и F_2 в зависимости от значения x*

F_1, F_2	x=0,49	x=0,5	x=0,51	x=0,75
	y	y	y	y
F_2=0	0	0	0	0
F_1=0 F_2=0	8,2413 5,4094	8,2482 5,4066	8,2553 5,4037	8,4735 5,3371
F_1=0 F_2=0	10,0799 9,1129	10,0722 9,1118	10,0645 9,1107	9,83 9,0867
F_1=0 F_2=0	13,9805 12,0339	14,0563 12,0351	отсутствует (предшествующий минимум больше нуля) 12,0363	отсутствует 12,0692
F_1=0 F_2=0	14,2140 14,1340	**14,1383** **14,1346**	отсутствует 14,1352	отсутствует 14,1547
F_1=0 F_2=0	17,3244 15,8890	17,3295 15,8869	17,3348 15,8848	17,5031 15,8273
F_1=0 F_2=0	18,7353 18,0771	18,7311 18,07795	18,7268 18,0788	18,5798 18,1016
F_1=0 F_2=0	отсутствует 19,9574	- 19,9614	- 19,9654	- 20,0984
F_1=0 F_2=0	21,0025 21,0266	**21,02196** **21,02180**	21,0437 21,0169	отсутствует 20,8616
F_1=0 F_2=0	21,4860 22,9751	21,4650 22,9748	21,4416 22,9744	отсутствует 22,9648
F_1=0 F_2=0	24,4143 отсутствует	24,4293 -	24,4452 -	отсутствует -
F_1=0 F_2=0	25,0237 25,0032	**25,01121** **25,01087**	24,9978 25,0187	отсутствует отсутствует
…	…	…	…	…
F_1=0 * F_2=0	98,8295 98,8701	**98,8311** **98,8322**	98,8327 отсутствует	98,7941 отсутствует
…	…	…	…	…
F_1=0 F_2=0	99999,6797 99999,7042	**99999,701** **99999,701**	отсутствует 99999,6975	отсутствует отсутствует
F_1=0 F_2=0	100000,3466 100000,0596	100000,3504 100000,0569	100000,3544 100000,0540	100000,6009 99999,9222
…	…	…	…	…
F_1=0 F_2=0	999997,9784 999997,9605	**999997,9682** **999997,9683**	9999997,9540 999997,9778	отсутствует отсутствует

Примечание. Нули каждой функции расположены в порядке возрастания y; значения y даны с округлением. Жирным шрифтом выделены совместные нули. В строке со знаком * имеется слабо выраженный максимум y = 98,8402 при x = 0,6 (шаг Δx = 0,05).

Нас интересуют совместные нули функций F_1 и F_2. Ясно, что $F_1(x,0) = S(x)$, $F_2(x,0) = 0$. Эти значения можно рассматривать как начальные условия в задаче нахождения нулей. В статье выполнены прямые расчеты величины $F_1(x,0) = S(x)$ по (1), которая заменялась конечным отрезком ряда $S_n(x)$, в диапазоне $0{,}4 \le x \le 0{,}96$.При этомn выбиралось таким, чтобы ошибка вычислений была приемлемой. Расчеты для

$x < 0{,}4$ не проводились, так как из-за увеличения ошибки вычисления являются трудоемкими и не нужны для наших целей. Результаты расчетов приведены в Табл. 1. Рассмотрим, как изменяются величины F_1 и F_2. Выражения (3а), (3б) представляют собой сумму косинусов и синусов соответственно с убывающим периодом, ограниченных значениями амплитуды $A(x, N)$ и показателями четности, изменяющими знак в зависимости от четности числа N. Амплитуда $A(x, N)$ уменьшается с увеличением N (при постоянном x) и с увеличением x (при постоянном N). При этом F_1 и F_2 принимают положительные и отрицательные значения в зависимости от того, серии какого знака преобладают (плюс или минус). При увеличении y период функций B_1 и B_2 уменьшается от $2\pi/ln2$ до $2\pi/lnN_0$, где N_0 – число членов ряда, учитываемых в (3а), (3б). Если lnN фиксировано, то как должно изменяться y, чтобы обеспечить периодичность. Для $N = 2$ период составляет $\Delta y = \frac{2\pi}{ln2} = 9{,}06$, для $N = 10^6$он составляет $\Delta y = \frac{2\pi}{6ln10} = 0{,}455$. Рассмотрим теперь, как изменяются период и расстояние между нулями функций $B_1(B_2)$при фиксированному(число членов ряда конечно). Для $y = 0{,}1 \dots 0{,}2$ нули отсутствуют, так как $ylnN_0 < \pi$. При $y = 0{,}3$ имеется один нуль, так как $ylnN_0$ лишь незначительно превышает π. При $y = 1$ функция B_2 имеет пять нулей, а именно: при$N_0 = 1;\ 23;\ 535;\ 12391;\ 286751$ (первое значение указано точно, а остальные приближенно), что обусловлено весьма медленным изменением функции логарифма с ростом N. Нули функции B_1 при значении $y = 1$ сдвинуты на $\pi/2$ относительно нулей B_2 и приходятся на максимумы и минимумы функции B_2. Она имеет 4 нуля: при $N_0 = 5; 111; 2576; 59610$ (значения указаны приближенно). Эти закономерности справедливы и для функций F_1 , F_2 , а именно, при малых значениях y преобладают длиннопериодические составляющие, и расстояние между нулями у этих функций значительное, а при больших y основную роль играют короткопериодические составляющие, и расстояние между нулями становится очень малым. Проводилось исследование поведения функций F_1, F_2 в диапазоне $0{,}4 \le x \le 0{,}96$ при различных значениях y от 0,1 до 10^6. Для каждого фиксированного xфункция $F_1(x, y)$изменяется периодически с увеличением y. При $y = 0$ она равна $S(x)$ (см. Табл. 1), затем растет, достигает положительного максимума, уменьшается, проходит через нуль, достигает минимума, опять возрастает, проходит через 0, достигает максимума и т.д. Функция $F_2(x, y)$ также изменяется периодически. При $y = 0$ она равна 0, затем убывает, достигает минимума, после этого возрастает, проходит через 0, достигает максимума, убывает, проходит через 0 и т.д. Для каждого фиксированного y при увеличении x от 0,4 до 0,96 функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ изменяются монотонно на всем диапазоне изменения x, или одна из них имеет слабо выраженный максимум (минимум), а другая изменяется монотонно на всем диапазоне, причем изменение достаточно медленное (плавное). Привести полностью эти данные не представляется возможным ввиду большого объема, поэтому перечислим некоторые характерные случаи. Обе функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ положительные и одновременно убывают, одна функция убывает, а другая возрастает, одна имеет слабо выраженный максимум (минимум), а другая убывает; обе функции отрицательные и одновременно возрастают (убывают по модулю); одна из функций положительная, а другая отрицательная, и обе возрастают, отрицательная возрастает, а положительная убывает, положительная имеет слабо выраженный минимум, а отрицательная возрастает; обе функции или одна из них меняют знак, изменяясь монотонно, одна из них имеет слабо выраженный минимум (максимум), а другая монотонно возрастает (убывает). Перечисленные случаи периодически повторяются с увеличением y. Анализ показывает, что функции F_1, F_2 при заданном y могут пересекаться не более одного раза с увеличением x, причем только в совместном нуле. Совместные нули соответствуют тем значениям y, в достаточно малой окрестности которых обе функции изменяют знак в одном или противоположных направлениях (при сохранении монотонного поведения с увеличением x), и перемена знака происходит вблизи (в окрестности) значения x, при котором имеется совместный нуль, т.е., в нашем случае, вблизи 1/2. Отметим, что перемена знака лишь у одной из функций может наблюдаться при приближении к нулю именно этой функции или на значительном удалении по переменной y от совместного нуля. В остальных перечисленных выше случаях значения функций F_1и F_2 значительно различаются на всем диапазоне x. Проводилось исследование положения характеристических точек (максимумов, минимумов и нулей) функций F_1, F_2 с увеличением y для x в диапазоне от 0,4 до 0,96. Результаты показывают, что значения y, соответствующие характеристическим точкам функций, изменяются монотонно на всем диапазоне изменения x или имеют слабо выраженный максимум (минимум), причем изменение находится в узких пределах. Поэтому всегда можно установить соответствие между точками, выбирая шаг достаточно малым, например, $\Delta x = 0{,}01 \dots 0{,}05$. Трудности могут возникать при очень больших значениях y из-за уменьшения периода изменения функций, но и здесь, действуя последовательно и выбирая шаг достаточно малым, всегда можно определить перемещение соответствующей точки. В Табл. 2 в качестве примера приведены результаты расчета положения некоторых максимумов функций F_1, F_2 при изменении x от 0,4 до 0,96 (выбраны максимумы с различным поведением). В Табл. 3 приведены результаты исследования чередования нулей функций (максимумы и минимумы не указаны, чтобы не увеличивать объем статьи) для $x = 0{,}49; 0{,}50; 0{,}51$, что позволяет понять существующие закономерности и сделать выводы. В Табл. 3 для сравнения приведены также значения y для тех же нулей при $x = 0{,}75$. Теперь рассмотрим поведение решений системы (3а), (3б), т.е. совместных нулей функций F_1и F_2. Сначала докажем, что функции F_1и F_2 имеют бесконечно много нулей при каждом x. Выберем произвольное рациональное xиз интервала $0{,}4 \dots 0{,}96$. Функции F_1и F_2 являются периодическими, и их характеристические точки повторяются с увеличениемy, при этом период уменьшается (см. выше). Разобьем бесконечный интервал $0 < y < \infty$ на отрезки, содержащие одно отрицательное и одно положительное значение функции $F_1(F_2)$, следующие друг за другом. Между ними функция $F_1(F_2)$ принимает нулевое значение. Величина отрезков уменьшается при $y \to \infty$, и таких отрезков будет бесконечно много, что и доказывает утверждение. Так как F_1 и F_2 непрерывные функции по x и y, то этот вывод справедлив для любого x в интервале $0 < x < 1$. При $x = 1/2$ некоторые из нулей функций F_1и F_2 будут совпадать, образуя множество решений системы (3а), (3б). Чтобы лучше понять, что происходит, используем графическое представление на плоскости. Пусть x – радиус окружности, а $|y|$ – угол, отсчитываемый от нуля в положительном направлении. Тогда нулям функций будут соответствовать точки на окружности данного радиуса, и их будет бесконечно много. При $x = 1/2$ совпадающим нулям функций F_1 и F_2 соответствуют «двойные» точки на окружности. Если $x \neq 1/2$, а именно, $x = 1/2 \pm \alpha$, где $0 < \alpha < 1/2$, то двойные точки расщепляются. Проведенный выше анализ (см. Табл. 3) показывает, что в этом случае образуются две точки: одна соответствует нулю F_1 , а вторая – нулю F_2, причем расщепление происходит в разные стороны (по значению y) от двойной точки. Величина расщепления зависит от $|x - 1/2|$, а знаки попеременно чередуются в зависимости от y. С удалением x от значения 1/2 точки все более разделяются (Табл. 3). В ряде случаев один из нулей может отсутствовать, т.е. в результате расщепления появляется только одна точка, соответствующая нулю одной из функций, что зависит от соотношения смещения функции, вызванного изменением x, и величины минимума функции, предшествующего двойной точке. В этом случае предшествующий отсутствующему нулю минимум при данном $x \neq 1/2$ положителен. Если при каком-то $x_1 \neq 1/2$ эта «аномалия» наблюдается впервые, то для всех $x > x_1$ она сохраняется. Число аномалий возрастает с увеличением x (и y). Так как в наших расчетах бесконечный ряд заменялся конечным отрезком ряда, то на результаты Табл. 3 влияют ошибка аппроксимации, разная скорость изменения и скорость сходимости функций F_1, F_2 вблизи нуля, а также путь, по которому подходим к нулю (с одной стороны или с разных при сохранении одинакового знака). Ошибки эти малы по сравнению с полезным эффектом и не влияют принципиально на результаты анализа, поэтому двойные точки надежно идентифицируются по совпадению двух цифр после запятой в значении y, соответствующем двойной точке. Как видно из Табл. 3, разность между нулями после расщепления значимо превышает ошибку. Покажем, что двойных точек на прямой $x = 1/2$ бесконечно много. Доказательство проводится, как и в предыдущем случае. Отметим, что для образования двойной точки нужно, чтобы F_1 и F_2 изменялись синхронно в одном или противоположных направлениях. Такие случаи, как показал наш анализ, повторяются периодически с увеличением y от 0 до ∞. Период повторения двойных точек зависит от области значений y и начальных условий, т.е. значений $F_1(x,0)$ и $F_2(x,0)$. Разобьем опять интервал $0 < y < \infty$ на отрезки, так, чтобы каждой функции соответствовала пара положительных и отрицательных значений, ближайших друг к другу, и функции изменялись синхронно, т.е. примерно с одинаковым коэффициентом чувствительности по y. Длина отрезков будет уменьшаться при $y \to \infty$, и таких отрезков будет бесконечно много, что и доказывает утверждение. Ясно, что для конечного y число двойных точек всегда меньше числа нулей каждой из функций F_1,F_2, так как их появление связано с более строгими ограничениями. Имеем следующую оценку сверху: число двойных точек меньше $ylnN_0/2\pi$. Что можно сказать о причинах появления двойных точек? Они обусловлены свойствами симметрии функций. Как видно из (3а), (3б), F_1 – четная функция, а F_2 – нечетная функция y, поэтому множество нулей этих функций инвариантно относительно замены y на $-y$, что соответствует симметрии отражения относительно оси x (при фиксированном x, т.е. в одномерном случае, эту симметрию можно уподобить симметрии относительно обращения времени). Второй тип симметрии – центральная симметрия относительно точки $x = 1/2$, т.е. центра полосы, определяющая инвариантность множества нулей относительно замены $x \to 1 - x$ (при одновременной замене y на$-y$). При $x = 1/2$ оба типа симметрии совпадают, поэтому появляются двойные точки при некоторых значениях y. Если $x \neq 1/2$, то второй тип симметрии исчезает, и двойная точка расщепляется. Для доказательства гипотезы Римана используем функциональное соотношение для дзета-функции [3, с. 63]. Запишем его в виде

$$C(z)\zeta(z) = D(z)\zeta(1-z), \tag{4}$$

где $C(z)$, $D(z)$ – функции от z.

Из (4) следует, что если $z_0 = \frac{1}{2} + iy_0$– нуль дзета-функции, то $1 - z_0 = \frac{1}{2} - iy_0$ тоже является нулем этой функции, что согласуется с симметрией функций F_1, F_2 (см. выше). Здесь предполагается, что $C(z_0)$ не обращается в бесконечность, а $D(z_0)$ – в нуль; эти условия в нашем случае выполняются. Предположим теперь, что имеется нуль при $\tilde{z} = (\frac{1}{2} - \alpha) + i\tilde{y}$, где $0 < \alpha < 1/2$. Тогда из (4) следует, что нулем является также $1 - \tilde{z} = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) - i\tilde{y}$ (при выполнении оговоренного выше условия при $\tilde{z}$). Но так как функции F_1 и F_2 с ростом x при одном и том же значении y (осевая симметрия сохраняется при любом x) изменяются монотонно и могут пересекаться только один раз, то вторая двойная точка возникнуть не может (см. проведенный выше анализ), что и доказывает справедливость гипотезы Римана. Иными словами, при $x \neq 1$ не могут быть реализованы одновременно два вида симметрии: осевой (симметрии отражения) и центральной, необходимые для появления двойной точки. Чтобы лучше понять смысл гипотезы Римана, используем следующую аналогию. Имеется атомная система. Требуется изучить ее спектр в полосе $0 < x < 1$, т.е. определить уровни стационарной энергии системы. Эта задача, как известно, сводится к решению волнового уравнения (уравнения Шредингера). Предположим, что волновая функция системыψаппроксимируется (при фиксированном x)

взвешенной суммой базисных функций B_1, B_2 и имеет вид (3а), (3б). Эти базисные функции принадлежат двум «некомбинирующим» наборам, так что $\psi = F_1$ соответствует косинусоподобному состоянию системы, а $\psi = F_2$ – синусоподобному. Поэтому задача отыскания уровней энергии (собственных значений) сводится к системе двух уравнений раздельно для двух некомбинирующих наборов. В общем случае решения для этих наборов различны, тем не менее, функции могут иметь общие узлы (нули). Их положение вполне определяется свойствами симметрии (группой симметрии), т.е. допустимыми преобразованиями, относительно которых множество нулей инвариантно. В нашем случае, как отмечалось выше, это симметрия отражения и центральная симметрия. При $x = 1/2$ имеем «вырожденное» состояние, так как оба типа симметрии совпадают. Если $x \neq 1/2$, то вырождение снимается, так как остается только симметрия отражения.

В заключение рассмотрим, как зависит число совпадающих нулей (двойных точек) p от y. Для этого подсчитаем средний период появления таких нулей в интервале $0 \leq y \leq 100$ при $x = 1/2$. Он примерно равен 3,09, т.е. близок к числу π. Для оценки снизу числа нулей имеем тогда следующее соотношение:

$$p > 1 + [(y - y_0)/\pi], \tag{5}$$

где $y_0 = 14{,}13$ соответствует первому нулю, $[\cdot]$ – целая часть числа, $y = 10^2 k$, $k = 1{,}2{,}3 \ldots$.

Список литературы

1. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМЛ, 1962. 1100 с.
2. **Справочник по специальным функциям** / под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука (ФМЛ), 1979. 832 с.
3. **Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.** Курс современного анализа. М.: ФМЛ, 1963. Ч. 2. Трансцендентные функции. 516 с.
4. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. М.: Наука (ФМЛ), 1968. 344 с.

STUDY OF NON-TRIVIAL ZEROS OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

Romanov Vadim Nikolaevich, Doctor in Technical Sciences, Professor
Saint Petersburg
vromanvpi@mail.ru

The article is devoted to the non-trivial zeros of Riemann zeta-function. The direct calculations of zeros positions at different argument values are carried out. The paper studies the behaviour and determines the position of the characteristic points (maxima, minima and zeros) of series approximating zeta-function. The article shows the invariance of zeros set with respect to symmetry transformations, namely, axial and central symmetry. On this basis a method of the proof of Riemann hypothesis is proposed. An interpretation of the hypothesis by the example of atomic system with certain symmetry properties of its wave function is given.

Key words and phrases: prime numbers; sum of inverse degrees; Riemann zeta-function; Riemann hypothesis; non-trivial zeros of zeta-function; functional ratios for zeta-function; symmetry transformations.

УДК 334.024
Экономические науки

Статья раскрывает содержание понятия «клиентоориентированность». Показаны уровни развития бизнеса, на которых должно происходить создание клиентоориентированной системы управления. На основе модели Мак-Кинси «7С» продемонстрированы различные аспекты проявления клиентоориентированности. Обозначены главные принципы клиентоориентированного подхода к развитию организации. Представлены значимые результаты и уровни развития клиентоориентированности.

Ключевые слова и фразы: интеллектуальный потенциал бизнеса; клиентоориентированность; лояльность; модель Мак-Кинси «7С»; сервис.

Рувенный Игорь Ярославович, к.э.н., доцент
Уфимский государственный авиационный технический университет
ruvenny@mail.ru

КЛИЕНТООРИЕНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД К РАЗВИТИЮ ОРГАНИЗАЦИИ[©]

В современном бизнесе постепенно меняются условия конкуренции. Если раньше конкурентоспособность организации определялась преимущественно финансовыми показателями, то сегодня на первый план выходят интеллектуальный потенциал бизнеса и конкретные результаты его использования. Постоянное развитие, достижение целей, эффективная реализация стратегий во многом зависят от репутации, товарной марки, человеческого капитала и других нематериальных активов. Финансовые показатели деятельности отходят на второй план, их следует рассматривать как результат наличия и использования интеллектуального