Копп Михаил Иосифович

КРУПНОМАСШТАБНОЕ МАГНИТОВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДИНАМО. I. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ БЕЗ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В статье исследуется динамика крупномасштабных полей (вихревых и магнитных) в неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости в аксиальном однородном магнитном поле с мелкомасштабной турбулентностью. Получены нелинейные уравнения магнитовращательного динамо в третьем порядке теории возмущений по малому числу Рейнольдса. Изучена линейная стадия генерации крупномасштабных вихревых и магнитных полей в отсутствие внешнего однородного магнитного поля, возникающая из-за неустойчивости типа -эффекта. Численными методами найдены критерии генерации крупномасштабного вихревого и магнитного поля в зависимости от профиля угловой скорости вращения среды.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2016/4/14.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2016. № 4 (106). С. 59-73. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2016/4/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

анклав, но и со временем составили подавляющее большинство в старообрядчестве края. При этом и в начале XX в. и в более позднее время в Забайкалье наряду с семейскими были представлены и несемейские старообрядцы. Впрочем, ответ на подобное замечание авторы дали в самом названии справочника – «Старообрядцы (семейские) Бурятии», указывая, что имеются в виду именно семейские.

Можно сделать вывод, что историко-культурный энциклопедический справочник «Старообрядцы (семейские) Бурятии» стал эпохальным этапом в развитии историографии забайкальского старообрядчества. Он вобрал в себя лучшие достижения современной научной мысли, обобщил и обогатил их взаимным влиянием разных наук, заложил серьёзные основы как для дальнейших научных изысканий, так и для популяризации исторического опыта уникальной этноконфессиональной группы старообрядцев – семейских Забайкалья.

Список литературы

1. **Болонев Ф. Ф.** Старообрядцы Забайкалья в XVIII-XX вв. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2009. 340 с.
2. **Бураева С. В.** Рукописное наследие Забайкальских старообрядцев. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2006. 238 с.
3. **Васильева С. В.** Власть и старообрядцы Забайкалья (конец XVII – начало XX вв.). Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2007. 233 с.
4. **Ковригина И. А., Костров А. В.** П. Н. Врангель в Иркутске (1902-1906 гг.): «документальные жизнеописания» и архивные документы // Новый исторический вестник. 2012. № 2 (32). С. 57-66.
5. **Костров А. В.** Советская власть и старообрядцы Байкальской Сибири в 20-е гг. XX в. // Новый исторический вестник. 2010. № 1 (23). С. 35-42.
6. **Костров А. В.** Старообрядчество и старообрядческая историческая мысль во второй половине XIX – начале XX вв. Иркутск: Оттиск, 2006. 160 с.
7. **Старообрядцы (семейские) Бурятии**: к 250-летию прибытия первых переселенцев-старообрядцев в Бурятию: историко-культурный энциклопедический справочник / науч. ред. Ф. Ф. Болонев. Улан-Удэ: ИД «ЭКОС», 2015. 264 с.

HISTORICAL AND CULTURAL ENCYCLOPEDIA "BURYATIA'S OLD BELIEVERS (THE SEMEISKIE)" AS A CRUCIAL STAGE FOR DEVELOPING THE TRANS-BAIKAL OLD BELIEF HISTORIOGRAPHY

Kovrigina Inessa Anatol'evna, Ph. D. in History
Irkutsk National Research Technical University
inessakovrigina@gmail.com

The article presents an analytical survey of the latest achievements in the Trans-Baikal Old Belief historiography. The considerable quantitative growth of the scientific publications devoted to the Trans-Baikal Old Believers, or the Semeiskie, as they are called in the krai, has recently transformed into the quality of a fundamental encyclopedic work created by outstanding experts in these complicated and important sphere. The historical and cultural encyclopedia "Buryatia's Old Believers (the Semeiskie)" came out as a scientific paper of such value. The author focuses on analyzing the originality of this epochal publication and its potentials for further researches.

Key words and phrases: Old Belief; the Trans-Baikal Old Believers; the Semeiskie; Buryatia; historiography; modern stage.

УДК 532.1
Физико-математические науки

В статье исследуется динамика крупномасштабных полей (вихревых и магнитных) в неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости в аксиальном однородном магнитном поле с мелкомасштабной турбулентностью. Получены нелинейные уравнения магнитовращательного динамо в третьем порядке теории возмущений по малому числу Рейнольдса. Изучена линейная стадия генерации крупномасштабных вихревых и магнитных полей в отсутствие внешнего однородного магнитного поля, возникающая из-за неустойчивости типа α -эффекта. Численными методами найдены критерии генерации крупномасштабного вихревого и магнитного поля в зависимости от профиля угловой скорости вращения среды.

Ключевые слова и фразы: мелкомасштабная турбулентность; крупномасштабная неустойчивость; магнитовращательная неустойчивость; многомасштабные асимптотические разложения; α -эффект.

Копп Михаил Иосифович, к. ф.-м. н.
г. Харьков, Украина
michael.kopp@mail.ru

КРУПНОМАСШТАБНОЕ МАГНИТОВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДИНАМО. I. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ БЕЗ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введение

В последнее время актуальное значение имеют вопросы, связанные с исследованием эффектов вращения в электропроводящих средах, играющих важную роль для технических применений, например, в термоядерных установках [16], в устройствах по накоплению энергии, в плазменных центрифугах [5].

Теоретическим исследованиям устойчивости вращающихся электропроводящих сред (плазма, жидкие металлы) в слабых магнитных полях посвящено огромное число работ (см., например: [1; 3; 4; 9-11; 17-20; 22-25; 27-31]). Здесь следует сказать и об астрофизических приложениях данной проблемы. В частности, в работах [18; 27] магнитовращательная неустойчивость (МВН) применялась для объяснения происхождения турбулентности плазмы в аккреционных дисках. Впервые в работах [1; 20] была описана неустойчивость неоднородно вращающейся в осевом магнитном поле абсолютно электропроводящей жидкости. Причина появления этой неустойчивости заключается в следующем. В идеальной жидкости магнитное поле вморожено, и при возмущении малого объема жидкости возмущается вместе с ним. Возмущенная компонента магнитного поля посредством действия амперовой силы способствует усилению компоненты силы Кориолиса и нарастанию первоначального радиального смещения элемента жидкости [17].

В дальнейшем исследование устойчивости вращающейся плазмы проводилось с учетом влияния различных физических процессов: вязкая и омическая диссипация, стратификация среды и т.д. Так, в работах [9-11; 17; 22-25; 27-29] подробно исследовалось влияние эффектов вязкости, магнитной диффузии и радиальной стратификации на устойчивость неоднородно вращающейся плазмы. Влияние нетривиальной топологии внешнего магнитного поля, т.е. ненулевой спиральности этого поля $\vec{B_0} rot \vec{B_0} \neq 0$, подробно проанализировано в ряде работ: [9; 23-25]. В недавних работах [3; 4] были получены критерии развития МВН для разряженной плазмы при учете эффектов Холла и вязкой диссипации. Интересным направлением в теории МВН является проблема влияния турбулентного движения среды на эволюцию гидромагнитных возмущений при вращении сдвиговых течений. Простейшая модель турбулентного движения среды в виде стохастического шума (дельта-коррелированный процесс) рассмотрена в работах [19; 31]. Как показал анализ экспериментальных и теоретических расчетов в [Ibidem], учет стохастического шума приближает линейную теорию МВН к астрофизическим данным. Путем введения аддитивного шума к линеаризованным уравнениям в [Ibidem] получены критерии устойчивости Рэлея для гидродинамических и гидромагнитных вращающихся сдвиговых потоков. Таким образом была осуществлена первая попытка решить проблему турбулентности в аккреционных дисках.

В работе [30] исследовалось влияние турбулентности, возбуждаемой вследствие развития МВН, на динамику крупномасштабных возмущений магнитного поля в рамках «квазилинейной теории». Численный анализ квазилинейных уравнений для средних полей проиллюстрировал связь крупномасштабного динамо с МВН, которую авторы работы [Ibidem] называют магнитовращательным (МВ) динамо.

В настоящей работе аналитическим методом рассмотрен новый тип крупномасштабной неустойчивости, обусловленной влиянием мелкомасштабной турбулентности в неоднородно вращающейся электропроводящей среде. Мелкомасштабная турбулентность моделируется внешней силой, которая возбуждает мелкомасштабные пульсации скорости с малым числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$. Наличие малого параметра позволяет применять систематический метод многомасштабных асимптотических разложений. Преимущество данного метода, в сравнении с другими техниками замыкания усредненных уравнений [6; 8; 12], заключается в строгом выделении из всей иерархии возмущений главного порядка, в котором получаются основные уравнения для описания эволюции крупномасштабных возмущений. Впервые метод многомасштабных асимптотических разложений был применен в работе [21] для описания генерации крупномасштабных вихревых структур в отражательно-неинвариантной турбулентности. Этот метод получил широкое применение для описания генерации нелинейных вихревых структур в конвективных средах [7; 15; 32; 33], во вращающейся однородной жидкости [26]. С применением асимптотического метода многомасштабных разложений в настоящей работе получена нелинейная система уравнений для крупномасштабных возмущений скорости и магнитного поля, которая является основной системой уравнений нелинейного МВ-динамо. Большое значение имеет анализ устойчивости малых крупномасштабных возмущений, описываемых линеаризованной системой нелинейного МВ-динамо. Исследованию этой проблемы и посвящена настоящая работа. В результате проведенного анализа была обнаружена новая крупномасштабная неустойчивость в неоднородно вращающейся электропроводящей среде, относящаяся к неустойчивостям типа α-эффекта в турбулентных средах [8]. Генерация крупномасштабных вихревых и магнитных структур с помощью мелкомасштабной турбулентности представляет большой интерес для многих астрофизических проблем: например, образование вихревых и магнитных структур в аккреционных дисках или других неоднородно вращающихся космических объектах.

1. Постановка задачи и уравнения для крупномасштабных полей

Исходной системой уравнений являются хорошо известные уравнения магнитной гидродинамики для описания динамики несжимаемой вязкой электропроводящей жидкости в цилиндрической системе координат (r, φ, z):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{1}{4\pi\rho}\left((\vec{B}\nabla) B_r - \frac{B_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu\left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right) + F_{0r} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\vec{v}\nabla) v_\varphi + \frac{v_\varphi v_r}{r} - \frac{1}{4\pi\rho}\left((\vec{B}\nabla) B_\varphi + \frac{B_\varphi B_r}{r} \right) = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) + F_{0\varphi} \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)v_z-\frac{1}{4\pi\rho}(\vec{B}\nabla)B_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(P+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\nu\Delta v_z+F_{0z} \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)B_r-(\vec{B}\nabla)v_r=\eta\left(\Delta B_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{B_r}{r^2}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)B_\varphi-(\vec{B}\nabla)v_\varphi+\frac{1}{r}\left(v_\varphi B_r-v_r B_\varphi\right)=\eta\left(\Delta B_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{B_\varphi}{r^2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)B_z-(\vec{B}\nabla)v_z=\eta\Delta B_z \tag{7}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{B_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{8}$$

Предположим, что плазма находится в однородном магнитном поле $\vec{B}_0$, направленном вдоль оси вращения $\vec{\Omega}$, и вращается в азимутальном направлении со скоростью $v_\varphi=r\Omega(r)$, где $\Omega(r)$ – угловая скорость вращения произвольной функции радиуса.

Как известно (см., например, [17]), система уравнений (1)-(8) имеет стационарные решения (в отсутствие внешней силы $\vec{F}_0$) следующего вида:

$$P=P(r),\ \rho=\rho_0=const,\ v_r(r)=0,\ v_\varphi(r)=r\Omega(r),\ v_z(r)=0,$$
$$B_r(r)=0,\ B_\varphi(r)=0,\ B_z(r)=B_0 \tag{9}$$

Для исследования крупномасштабной неустойчивости стационарного решения (9) приложим к такой среде внешнюю мелкомасштабную силу $\vec{F}_0$. Такая сила будет поддерживать мелкомасштабные флуктуации поля скорости $\vec{u}_0=(u_{0r},u_{0\varphi},u_{0z})$ с малым числом Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{v_0 t_0}{\lambda_0}\ll 1$, где λ_0 – характерный масштаб, v_0, t_0 – характерная скорость и характерное время флуктуаций. Модельный вид мелкомасштабной внешней силы $\vec{F}_0$ определим ниже, а её свойства представим в следующем виде:

$$div\vec{F}_0=0,\ rot\vec{F}_0\neq 0,\ \vec{F}_0 rot\vec{F}_0\neq 0,\ \vec{F}_0=f_0\vec{F}_0\left(\frac{x}{\lambda_0};\frac{t}{t_0}\right) \tag{10}$$

Здесь f_0 – характерная амплитуда внешней силы в безразмерных единицах. Подставляя возмущенные решения:

$\vec{v}=\begin{pmatrix} u_r(r,\varphi,z,t)\\ r\Omega(r)+u_\varphi(r,\varphi,z,t)\\ u_z(r,\varphi,z,t)\end{pmatrix}$, $\vec{B}=\begin{pmatrix} b_r(r,\varphi,z,t)\\ b_\varphi(r,\varphi,z,t)\\ B_0+b_z(r,\varphi,z,t)\end{pmatrix}$, $P=P(r)+\frac{B_0^2}{8\pi}+p(r,\varphi,z)$ в систему уравнений (1)-(8), получим уравнения эволюции для возмущений скорости $\vec{u}$ и магнитного поля $\vec{b}$:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-2\Omega(r)u_\varphi+(\vec{u}\nabla)u_r-\frac{u_\varphi^2}{r}-\frac{1}{4\pi\rho_0}\left((\vec{b}\nabla)b_r+B_0\frac{\partial b_r}{\partial z}-\frac{b_\varphi^2}{r}\right)=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta u_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{u_r}{r^2}\right)+F_{0r} \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-2\Omega(r)u_r\kappa+(\vec{u}\nabla)u_\varphi+\frac{u_\varphi u_r}{r}-\frac{1}{4\pi\rho_0}\left((\vec{b}\nabla)b_\varphi+B_0\frac{\partial b_\varphi}{\partial z}+\frac{b_\varphi b_r}{r}\right)=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0 r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\Delta u_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r^2}\right)+F_{0\varphi} \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+(\vec{u}\nabla)u_z-\frac{1}{4\pi\rho_0}\left((\vec{b}\nabla)b_z+B_0\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta u_z+F_{0z} \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial b_r}{\partial\varphi}+(\vec{u}\nabla)b_r-(\vec{b}\nabla)u_r-B_0\frac{\partial u_r}{\partial z}=\eta\left(\Delta b_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial b_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{b_r}{r^2}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi}+(\vec{u}\nabla)b_\varphi-(\vec{b}\nabla)u_\varphi-B_0\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{u_\varphi b_r-u_r b_\varphi}{r}-b_r r\frac{\partial \Omega}{\partial r}=$$
$$=\eta\left(\Delta b_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial b_r}{\partial \varphi}-\frac{b_\varphi}{r^2}\right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t}+\Omega(r)\frac{\partial b_z}{\partial \varphi}+(\vec{u}\nabla)b_z-(\vec{b}\nabla)u_z-B_0\frac{\partial u_z}{\partial z}=\eta\Delta b_z \tag{17}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial r}+\frac{b_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0 \tag{18}$$

Здесь введены обозначения для скалярного произведения и лапласиана:

$\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{b}\end{pmatrix}\nabla=\begin{pmatrix}u_r\\ b_r\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}+\begin{pmatrix}u_\varphi\\ b_\varphi\end{pmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\begin{pmatrix}u_z\\ b_z\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\kappa=1+\frac{1}{2}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}$ – параметр неоднородности вращения. Перейдем в уравнениях (11)-(18) к безразмерным переменным, для удобства обозначения которых пусть сохраняются обозначения размерных переменных:

$$r\to\frac{r}{\lambda_0},z\to\frac{z}{\lambda_0},\quad t\to\frac{t}{t_0},\quad \vec{u}\to\frac{\vec{u}}{v_0},\quad \vec{F}_0\to\frac{\vec{F}_0}{f_0},(\vec{B}_0,\vec{b})\to\frac{(\vec{B}_0,\vec{b})}{H_0},$$
$$\Omega\to\frac{\Omega}{\Omega_0},p\to\frac{p}{p_0\rho_0},t_0=\frac{\lambda_0^2}{\nu},\quad f_0=\frac{v_0\nu}{\lambda_0^2},\ p_0=\frac{\nu v_0}{\lambda_0}, \tag{19}$$

где H_0 – характерная величина мелкомасштабного магнитного поля, $\Omega_0=\Omega_0(\mathrm{R}_0)$ – постоянная угловая скорость вращения на радиусе R_0. При переходе к новой безразмерной величине магнитного поля $\vec{b}\to\vec{b}/\mathrm{Re}$ уравнения (11)-(18) в безразмерных переменных примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+D\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-2Du_\varphi+\mathrm{Re}\left((\vec{u}\nabla)u_r-\frac{u_\varphi^2}{r}\right)-\mathrm{Re}\,Q\left((\vec{b}\nabla)b_r-\frac{b_\varphi^2}{r}\right)-QB_0\frac{\partial b_r}{\partial z}=$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\Delta u_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{u_r}{r^2}+F_{0r} \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+D\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}-2Du_r\kappa+\mathrm{Re}\left((\vec{u}\nabla)u_\varphi+\frac{u_\varphi u_r}{r}\right)-\mathrm{Re}\,Q\left((\vec{b}\nabla)b_\varphi+\frac{b_\varphi b_r}{r}\right)-QB_0\frac{\partial b_\varphi}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\Delta u_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r^2}+F_{0\varphi} \tag{21}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+D\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}+\mathrm{Re}(\vec{u}\nabla)u_z-\mathrm{Re}\,Q\left((\vec{b}\nabla)b_z\right)-QB_0\frac{\partial b_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\Delta u_z+F_{0z} \tag{22}$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t}+D\frac{\partial b_r}{\partial \varphi}+\mathrm{Re}\left(\vec{u}\nabla)b_r-(\vec{b}\nabla)u_r\right)-B_0\frac{\partial u_r}{\partial z}=Pm^{-1}\left(\Delta b_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{b_r}{r^2}\right) \tag{23}$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t}+D\frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi}+(1-\kappa)2Db_r+\mathrm{Re}\left((\vec{u}\nabla)b_\varphi-(\vec{b}\nabla)u_\varphi+\frac{u_\varphi b_r-u_r b_\varphi}{r}\right)-B_0\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}=$$
$$=Pm^{-1}\left(\Delta b_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial b_r}{\partial \varphi}-\frac{b_\varphi}{r^2}\right) \tag{24}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t}+D\frac{\partial b_z}{\partial \varphi}+\mathrm{Re}\left((\vec{u}\nabla)b_z-(\vec{b}\nabla)u_z\right)-B_0\frac{\partial u_z}{\partial z}=Pm^{-1}\Delta b_z \tag{25}$$

Уравнения соленоидальности полей (14) и (18) сохраняют свой вид в безразмерных переменных. В уравнениях (20)-(25) введены безразмерные параметры: $D=D_0\Omega$, $D_0=\frac{\Omega_0\lambda_0^2}{\nu}$ – параметр вращения на масштабе λ_0 – связан с числом Тейлора $Ta=4D_0^2$, $Q=Ha^2/Pm$ – число Чандрасекара, $Ha=\frac{H_0\lambda_0}{\sqrt{4\pi\rho_0\nu\eta}}$ – число Гартмана, $Pm=\nu/\eta$ – магнитное число Прандтля, ν,η – коэффициенты кинематической вязкости и магнитной диффузии. Малым параметром асимптотического разложения считаем число Рейнольдса $R=\frac{v_0t_0}{\lambda_0}\ll 1$, а параметры D и Q – произвольными, не влияющими на схему разложения. Внешняя сила на фоне равновесного состояния и вызывает мелкомасштабные и высокочастотные осцилляции скорости. Средние значения

таких осцилляций – нулевые, но из-за нелинейного взаимодействия в некоторых порядках теории возмущения возникают члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными, и они будут условием разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение уравнений разрешимости, т.е. уравнений для крупномасштабных возмущений, и является основной задачей в данном разделе работы. Методика построения асимптотических уравнений хорошо разработана в [15; 21; 32; 33], следуя которым, представим пространственные и временные производные в уравнениях (14), (18) и (20)-(25) в виде асимптотического разложения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t_0}+\mathrm{Re}^4\frac{\partial}{\partial T},\quad \frac{\partial}{\partial r}\to\frac{\partial}{\partial r_0}+\mathrm{Re}^2\frac{\partial}{\partial R},\quad \frac{\partial}{\partial z}\to\frac{\partial}{\partial z_0}+\mathrm{Re}^2\frac{\partial}{\partial Z},\quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\to\frac{\partial}{\partial \varphi_0}+\mathrm{Re}^2\frac{\partial}{\partial \Phi},\quad \frac{1}{r}\to\frac{1}{r_0}+\mathrm{Re}^2\frac{1}{R},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\to\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}+\mathrm{Re}^2\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\Phi},$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\to\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial}{\partial\varphi_0^2}+\mathrm{Re}^2\frac{2}{r_0R}\frac{\partial}{\partial\varphi_0\partial\Phi}+\mathrm{Re}^4\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2} \tag{26}$$

Для оператора Лапласа Δ асимптотическое разложение имеет вид:

$$\Delta\to\partial_0^2+\mathrm{Re}^2\,\partial_0\nabla_s+\mathrm{Re}^4\,\nabla_s^2,\ \partial_0^2=\frac{\partial^2}{\partial r_0^2}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial r_0}+\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2},$$

$$\partial_0\nabla_s=2\frac{\partial^2}{\partial r_0\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r_0}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial R}+\frac{2}{r_0R}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\Phi}+2\frac{\partial^2}{\partial z_0\partial Z},\ \nabla_s^2=\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2} \tag{27}$$

Переменные $x_0=(\mathrm{r}_0,\varphi_0,\mathrm{z}_0,\mathrm{t}_0)$ и $X=(R,\Phi,Z,T)$ в формулах (26)-(27) можно назвать соответственно мелкомасштабными («быстрыми») и крупномасштабными («медленными») переменными. При построении нелинейной теории переменные $\vec{u}$, $\vec{b}$ и p представим в виде асимптотического ряда:

$$\begin{pmatrix}u_r\\u_\varphi\\u_z\end{pmatrix}=\mathrm{Re}^{-1}\begin{pmatrix}W_r\\W_\varphi\\W_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{0r}\\u_{0\varphi}\\u_{0z}\end{pmatrix}+\mathrm{Re}\begin{pmatrix}u_{1r}\\u_{1\varphi}\\u_{1z}\end{pmatrix}+\mathrm{Re}^2\begin{pmatrix}u_{2r}\\u_{2\varphi}\\u_{2z}\end{pmatrix}+\mathrm{Re}^3\begin{pmatrix}u_{3r}\\u_{3\varphi}\\u_{3z}\end{pmatrix}+\ldots$$

$$\begin{pmatrix}b_r\\b_\varphi\\b_z\end{pmatrix}=\mathrm{Re}^{-1}\begin{pmatrix}H_r\\H_\varphi\\H_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{0r}\\b_{0\varphi}\\b_{0z}\end{pmatrix}+\mathrm{Re}\begin{pmatrix}b_{1r}\\b_{1\varphi}\\b_{1z}\end{pmatrix}+\mathrm{Re}^2\begin{pmatrix}b_{2r}\\b_{2\varphi}\\b_{2z}\end{pmatrix}+\mathrm{Re}^3\begin{pmatrix}b_{3r}\\b_{3\varphi}\\b_{3z}\end{pmatrix}+\ldots \tag{28}$$

$$p(\mathrm{r},\varphi,\mathrm{z})=\mathrm{Re}^{-3}\,p_{-3}+\mathrm{Re}^{-2}\,p_{-2}+\mathrm{Re}^{-1}\,p_{-1}+p_0+\mathrm{Re}(p_1+\overline{p}_1(R,\Phi,Z))+\mathrm{Re}^2\,p_2+\mathrm{Re}^3\,p_3+\cdots$$

Угловую скорость вращения Ω считаем зависящей только от «медленных» переменных, а именно от радиальной компоненты $\Omega=\Omega(R)$. Тогда параметр неоднородности вращения κ можно записать следующим образом: $\kappa=1+Ro$, где $Ro=\frac{1}{2}\frac{d\ln\Omega}{d\ln R}$ – число Россби [24]. Для твердотельного вращения $\Omega=const$ параметр Россби равен нулю $Ro=0$, в случае кеплеровского вращения $Ro=-3/4$, для рэлеевского профиля угловой скорости $\Omega(R)\sim R^{-2}$, соответственно, $Ro=-1$.

Подставим разложения (26)-(28) в систему уравнений (14), (18), (20)-(25) и, собирая вместе члены с одинаковыми порядками по Re до степени Re^3 включительно, получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Алгебраическая структура асимптотического разложения уравнений (14), (18), (20)-(25) в различных порядках по Re имеет очень громоздкий вид. Поэтому мы приведем только основные секулярные уравнения, т.е. уравнения для крупномасштабных полей. Из секулярных уравнений для крупномасштабного магнитного поля $\vec{H}$ в Re^{-1} порядке следует условие осевой симметрии:

$$D\frac{\partial H_r}{\partial\Phi}=0,\ D\frac{\partial H_\varphi}{\partial\Phi}=0,\ D\frac{\partial H_z}{\partial\Phi}=0 \tag{29}$$

или $H_r=H_r(R,Z)$, $H_\varphi=H_\varphi(R,Z)$, $H_z=H_z(R,Z)$. Для упрощения задачи будем полагать и крупномасштабное поле скорости осесимметричным: $W_r=W_r(R,Z), W_\varphi=W_\varphi(R,Z)$, $W_z=W_z(R,Z)$. Уравнения для крупномасштабных полей $\vec{W}$ и $\vec{H}$, которые появляются в третьем порядке теории возмущений по Re, с учетом их осевой симметрии имеют вид:

$$\partial_T W_r+\partial_R(T_{rr}-QM_{rr})+\partial_Z(T_{zr}-QM_{zr})=-\partial_R\overline{p}+\nabla_s^2W_r-\frac{W_r}{R^2} \tag{30}$$

$$\partial_T W_\varphi+\partial_R(T_{r\varphi}-QM_{r\varphi})+\partial_Z(T_{z\varphi}-QM_{z\varphi})=-R^{-1}\partial_\Phi\overline{p}+\nabla_s^2W_\varphi-\frac{W_\varphi}{R^2} \tag{31}$$

$$\partial_T W_z+\partial_R(T_{rz}-QM_{rz})+\partial_Z(T_{zz}-QM_{zz})=-\partial_Z\overline{p}+\nabla_s^2W_z\ ,\ \overline{p}=\overline{p_1}+\frac{\overline{(\mathrm{b}_0^k)^2}}{2},\ k=(r,\varphi,z) \tag{32}$$

$$\partial_T H_r - \partial_Z G_{rz} = Pm^{-1}\left(\nabla_s^2 H_r - \frac{H_r}{R^2}\right) \tag{33}$$

$$\partial_T H_\varphi - \partial_R G_{\varphi r} - \partial_Z G_{\varphi z} = Pm^{-1}\left(\nabla_s^2 H_\varphi - \frac{H_\varphi}{R^2}\right) \tag{34}$$

$$\partial_T H_z + \partial_R G_{rz} = Pm^{-1}\nabla_s^2 H_r \tag{35}$$

Здесь приняты обозначения для корреляторов мелкомасштабного поля скорости (напряжений Рейнольдса): $T_{rr} = \overline{u_{0r}u_{0r}}$, $T_{zr} = \overline{u_{0z}u_{0r}}$, $T_{r\varphi} = \overline{u_{0r}u_{0\varphi}}$, $T_{z\varphi} = \overline{u_{0z}u_{0\varphi}}$, $T_{zz} = \overline{u_{0z}u_{0z}}$, корреляторов мелкомасштабного магнитного поля (напряжений Максвелла): $M_{rr} = \overline{b_{0r}b_{0r}}$, $M_{zr} = \overline{b_{0z}b_{0r}}$, $M_{r\varphi} = \overline{b_{0r}b_{0\varphi}}$, $M_{z\varphi} = \overline{b_{0z}b_{0\varphi}}$, $M_{zz} = \overline{b_{0z}b_{0z}}$ и смешанных корреляторов (турбулентная э.д.с. [8]): $G_{rz} = \overline{u_{0r}b_{0z}} - \overline{u_{0z}b_{0r}}$, $G_{\varphi r} = \overline{u_{0\varphi}b_{0r}} - \overline{u_{0r}b_{0\varphi}}$, $G_{\varphi z} = \overline{u_{0\varphi}b_{0z}} - \overline{u_{0z}b_{0\varphi}}$, $G_{zr} = -G_{rz}$. В уравнениях (30)-(35) приняты обозначения для частных производных по «медленным» переменным: $\partial_T \equiv \frac{\partial}{\partial T}$, $\partial_R \equiv \frac{\partial}{\partial R}$, $\partial_\Phi \equiv \frac{\partial}{\partial \Phi}$, $\partial_Z \equiv \frac{\partial}{\partial Z}$. Аналогично примем обозначения для частных производных по «быстрым» переменным: $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t_0}$, $\partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial r_0}$, $\partial_\varphi \equiv \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \varphi_0}$, $\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z_0}$. Как видно из уравнений (30)-(35), для нахождения их в замкнутом виде необходимо вычислить корреляторы T_{ik}, M_{ik}, G_{ik} с помощью решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по Re.

2. Мелкомасштабные поля в нулевом порядке по Re

Уравнения асимптотического разложения в нулевом приближении по Re запишем в следующем виде:

$$\widehat{D}_W u_{0r} - 2Du_{0\varphi} = -\partial_r p_0 + Q\left(\vec{H}\nabla + B_0\partial_z\right)b_{0r} - Q\partial_r((\vec{H} + \vec{B_0})\vec{b_0}) + F_{0r} \tag{36}$$

$$\widehat{D}_W u_{0\varphi} + 2D\kappa u_{0r} = -r_0^{-1}\partial_\varphi p_0 + Q(\vec{H}\nabla + B_0\partial_z)b_{0\varphi} - Qr_0^{-1}\partial_\varphi((\vec{H} + \vec{B_0})\vec{b_0}) + F_{0\varphi} \tag{37}$$

$$\widehat{D}_W u_{0z} = -\partial_z p_0 + Q(\vec{H}\nabla + B_0\partial_z)b_{0z} - Q\partial_z((\vec{H} + \vec{B_0})\vec{b_0}) \tag{38}$$

$$\widehat{D}_H b_{0r} = \left(\vec{H}\nabla + B_0\partial_z\right)u_{0r},\ \widehat{D}_H b_{0\varphi} = 2D\frac{Ro\left(\vec{H}\nabla + B_0\partial_z\right)}{\widehat{D}_H}u_{0r} + \left(\vec{H}\nabla + B_0\partial_z\right)u_{0\varphi},\ \widehat{D}_H b_{0z} = \left(\vec{H}\nabla + B_0\partial_z\right)u_{0z} \tag{39}$$

$$\frac{\partial u_{0r}}{\partial r_0} + \frac{u_{0r}}{r_0} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial u_{0\varphi}}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial u_{0z}}{\partial z_0} = 0,\ \frac{\partial b_{0r}}{\partial r_0} + \frac{b_{0r}}{r_0} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial b_{0\varphi}}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial b_{0z}}{\partial z_0} = 0, \tag{40}$$

где введены обозначения для операторов:

$$\widehat{D}_W \equiv \partial_t + D\partial_\varphi + (W_r\partial_r + r_0^{-1}W_\varphi\partial_\varphi + W_z\partial_z) - \partial_0^2,\ \widehat{D}_H \equiv \partial_t + D\partial_\varphi + (W_r\partial_r + r_0^{-1}W_\varphi\partial_\varphi + W_z\partial_z) - Pm^{-1}\partial_0^2,$$

$$\vec{H}\nabla \equiv H_r\partial_r + r_0^{-1}H_\varphi\partial_\varphi + H_z\partial_z$$

В уравнении (38) отсутствует компонента внешней случайной силы $F_{0z} = 0$, поскольку мы зададим её конкретный вид только с компонентами F_{0r} и $F_{0\varphi}$, т.е.

$$\vec{F_0} = f_0(\vec{e_r}\cos(m\varphi_0 + k_z z_0 - \omega_0 t_0) + \vec{e_\varphi}\cos(k_r r_0 + k_z z_0 - \omega_0 t_0)) \tag{41}$$

Здесь m – азимутальное число. Отсюда видно, что сила $\vec{F}_0$ задана в плоскости, ортогональной оси вращения, и удовлетворяет всем свойствам (10). Для удобства вычислений внешнюю силу (41) запишем в комплексной форме:

$$\vec{F}_0 = \vec{e_r}\frac{f_0}{2}e^{i\psi_2} + \vec{e_\varphi}\frac{f_0}{2}e^{i\psi_1} + c.c., \tag{42}$$

где $\psi_1 = \vec{k_1}\vec{x}_0 - \omega_0 t_0$, $\psi_2 = \vec{k_2}\vec{x}_0 - \omega_0 t_0$. Безразмерные волновые векторы выражаются через амплитуду k_0: $\vec{k_1} = k_0\left(1,0,1\right), \vec{k_2} = k_0\left(0,1,1\right)$. Далее для упрощения расчетов полагаем: $k_0 = 1$, $\omega_0 = 1$.

Мелкомасштабные осцилляции магнитного поля легко находятся из уравнений (39). Затем нам нужно из уравнений (36)-(38) исключить давление p_0, воспользовавшись условием соленоидальности полей $\vec{u_0}$ и $\vec{b_0}$ (40):

$$p_0 = \frac{2D}{\partial_0^2}(\partial_r u_{0\varphi} - \kappa r_0^{-1}\partial_\varphi u_{0r}) - Q((\vec{H} + \vec{B_0})\vec{b_0}) \tag{43}$$

В результате подстановки выражения (43) в уравнения (36)-(38), мы получим систему уравнений для мелкомасштабного поля скорости $\vec{u_0} = \left(u_{0r}, u_{0\varphi}, u_{0z}\right)$:

$$\begin{cases} \hat{d}_{11}u_{0r} + \hat{d}_{12}u_{0\varphi} = F_{0r} \\ \hat{d}_{21}u_{0r} + \hat{d}_{22}u_{0\varphi} = F_{0\varphi} \\ \hat{d}_{31}u_{0r} + \hat{d}_{32}u_{0\varphi} + \hat{d}_{33}u_{0z} = 0 \end{cases} \tag{44}$$

Здесь введены следующие обозначения для операторов:

$$\hat{d}_{11}=\hat{D}_W-Q\frac{(\vec{H}\nabla+B_0\partial_z)^2}{\hat{D}_H}-2D\kappa\frac{r_0^{-1}\partial_r\partial_\varphi}{\partial_0^2},\ \hat{d}_{12}=2D\left(\frac{\partial_r^2}{\partial_0^2}-1\right),\ \hat{d}_{21}=-2D\kappa\left(\frac{r_0^{-2}\partial_\varphi^2}{\partial_0^2}-1\right)-2DRoQ\frac{(\vec{H}\nabla+B_0\partial_z)^2}{\left(\hat{D}_H\right)^2},$$

$$\hat{d}_{22}=\hat{D}_W-Q\frac{(\vec{H}\nabla+B_0\partial_z)^2}{\hat{D}_H}+2D\frac{r_0^{-1}\partial_r\partial_\varphi}{\partial_0^2},\ \hat{d}_{31}=-2D\kappa\frac{r_0^{-1}\partial_r\partial_\varphi}{\partial_0^2},\ \hat{d}_{32}=2D\frac{\partial_r\partial_z}{\partial_0^2},\ \hat{d}_{33}=\hat{D}_W-Q\frac{(\vec{H}\nabla+B_0\partial_z)^2}{\hat{D}_H}$$

Система линейных неоднородных уравнений (44) легко решается при помощи формул Крамера (см., например, [2]), а компоненты мелкомасштабного поля скорости $\vec{u_0}$ соответственно равны:

$$u_{0r}=\frac{1}{\Lambda}\left\{\hat{d}_{22}\hat{d}_{33}F_{0r}-\hat{d}_{12}\hat{d}_{33}F_{0\varphi}\right\},\ u_{0\varphi}=\frac{1}{\Lambda}\left\{\hat{d}_{11}\hat{d}_{33}F_{0\varphi}-\hat{d}_{21}\hat{d}_{33}F_{0r}\right\},$$

$$u_{0z}=\frac{1}{\Lambda}\left\{(\hat{d}_{21}\hat{d}_{32}-\hat{d}_{22}\hat{d}_{31})F_{0r}+(\hat{d}_{12}\hat{d}_{31}-\hat{d}_{11}\hat{d}_{32})F_{0\varphi}\right\},\qquad(45)$$

где Λ – детерминант системы уравнений (44): $\Lambda=\hat{d}_{11}\hat{d}_{22}\hat{d}_{33}-\hat{d}_{21}\hat{d}_{12}\hat{d}_{33}$.

После подстановки (41) в (45) находим явный вид мелкомасштабного поля скорости $\vec{u_0}$:

$$u_{0r}=\frac{f_0}{2}\frac{D}{\left(\hat{D}^*_{W_1}+Q\frac{(H_1+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_1}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}+\frac{f_0}{2}\frac{\hat{D}^*_{W_2}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_2}}}{\left(\hat{D}^*_{W_2}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}+c.c.\qquad(46)$$

$$u_{0\varphi}=\frac{f_0}{2}\frac{\hat{D}^*_{W_1}+Q\frac{(H_1+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_1}}}{\left(\hat{D}^*_{W_1}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_1}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}-\frac{f_0}{2}\frac{D\kappa}{\left(\hat{D}^*_{W_2}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}-$$

$$-\frac{f_0}{2}\frac{\frac{2D}{\left(\hat{D}^*_{H_2}\right)^2}RoQ(H_2+B_0)^2}{\left(\hat{D}^*_{W_2}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}+c.c.\qquad(47)$$

$$u_{0z}=-\frac{f_0}{2}\frac{D}{\left(\hat{D}^*_{W_1}+Q\frac{(H_1+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_1}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}+\frac{f_0}{2}\frac{D\kappa}{\left(\hat{D}^*_{W_2}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}+c.c.\qquad(48)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\hat{D}_W\left(\vec{k}_1,-\omega_0\right)=\hat{D}^*_{W_1}=2-i\left(1-mD-W_1\right),\ \hat{D}_W\left(\vec{k}_2,-\omega_0\right)=\hat{D}^*_{W_2}=2-i\left(1-mD-W_2\right),\ W_1=W_r+W_z,\ W_2=W_\varphi+W_z$$

$$\hat{D}_H\left(\vec{k}_1,-\omega_0\right)=\hat{D}^*_{H_1}=2Pm^{-1}-i\left(1-mD-W_1\right),\ \hat{D}_H\left(\vec{k}_2,-\omega_0\right)=\hat{D}^*_{H_2}=2Pm^{-1}-i\left(1-mD-W_2\right),$$

$$H_1=H_r+H_z,\ H_2=H_\varphi+H_z$$

Комплексно-сопряженные величины здесь и далее будем обозначать звездочкой. В предельном случае, неэлектропроводной ($\sigma=0$) и вращающейся с постоянной угловой скоростью $\Omega=const$ жидкости, формулы (46)-(48) совпадают с результатами работы [26]. Перейдем теперь к вычислениям мелкомасштабных осцилляций поля $\vec{b_0}$, используя при этом выражения (39) и (46)-(48):

$$b_{0r}=\frac{f_0}{2}\frac{D\frac{i(H_1+B_0)}{\hat{D}^*_{H_1}}}{\left(\hat{D}^*_{W_1}+Q\frac{(H_1+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_1}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}+\frac{f_0}{2}\frac{\frac{i(H_2+B_0)}{\hat{D}^*_{H_2}}\left(\hat{D}^*_{W_2}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_2}}\right)}{\left(\hat{D}^*_{W_2}+Q\frac{(H_2+B_0)^2}{\hat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}+c.c.\qquad(49)$$

$$b_{0\varphi}=\frac{f_0}{2}\frac{\dfrac{i(H_1+B_0)}{\widehat{D}^*_{H_1}}\left(\widehat{D}^*_{W_1}+Q\dfrac{(H_1+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_1}}\right)}{\left(\widehat{D}^*_{W_1}+Q\dfrac{(H_1+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_1}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}+\frac{f_0}{2}\frac{2D^3Ro\dfrac{i(H_1+B_0)}{\widehat{D}^*_{H_1}}}{\left(\widehat{D}^*_{W_1}+Q\dfrac{(H_2+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_1}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}-$$

$$-\frac{f_0}{2}\frac{D\kappa\dfrac{i(H_2+B_0)}{\widehat{D}^*_{H_2}}}{\left(\widehat{D}^*_{W_2}+Q\dfrac{(H_2+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}-\frac{f_0}{2}\frac{2DRoQ\dfrac{i(H_2+B_0)^3}{\left(\widehat{D}^*_{H_2}\right)^3}}{\left(\widehat{D}^*_{W_2}+Q\dfrac{(H_2+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}+ \tag{50}$$

$$+\frac{f_0}{2}\frac{2DRo\dfrac{i(H_2+B_0)}{\left(\widehat{D}^*_{H_2}\right)^2}\left(\widehat{D}^*_{W_2}+Q\dfrac{(H_2+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_2}}\right)}{\left(\widehat{D}^*_{W_2}+Q\dfrac{(H_2+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}+c.c.$$

$$b_{0z}=-\frac{f_0}{2}\frac{D\dfrac{i(H_1+B_0)}{\widehat{D}^*_{H_1}}}{\left(\widehat{D}^*_{W_1}+Q\dfrac{(H_1+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_1}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_1}+\frac{f_0}{2}\frac{D\kappa\dfrac{i(H_2+B_0)}{\widehat{D}^*_{H_2}}}{\left(\widehat{D}^*_{W_2}+Q\dfrac{(H_2+B_0)^2}{\widehat{D}^*_{H_2}}\right)^2+2\kappa D^2}e^{i\varphi_2}+c.c. \tag{51}$$

Полученные выше выражения для мелкомасштабных осцилляций поля скорости $\vec{u_0}$ и магнитного поля $\vec{b_0}$ будем использовать для вычислений корреляционных функций.

3. Уравнения нелинейного МВ-динамо для «квазидвумерных» крупномасштабных полей

Во многих астрофизических и геофизических задачах часто применяется «квазидвумерное» приближение для описания динамики крупномасштабных вихревых и магнитных полей [13; 14]. В рамках этого приближения для нашей задачи будем считать, что крупномасштабная производная по Z – более предпочтительна, т.е. $\partial/\partial Z \gg \partial/\partial R, R^{-1}\partial_\Phi$, а геометрия крупномасштабных полей имеет следующий вид:

$$\vec{W}=\left(W_r(Z),W_\varphi(Z),0\right),\ \vec{H}=\left(H_r(Z),H_\varphi(Z),0\right) \tag{52}$$

Крупномасштабное движение среды вдоль осевого направления очень мало или отсутствует ($W_z=0$), а в горизонтальной плоскости устанавливается геострофическое равновесие, которое следует из секулярных уравнений в Re^{-1} порядке:

$$2DW_\varphi=\partial_R p_{-3},\ 2D\kappa W_r=-R^{-1}\partial_\Phi p_{-3},\ \partial_Z p_{-3}=0\Rightarrow p_{-3}(Z)=const \tag{53}$$

На начальной стадии эволюцию крупномасштабных возмущений можно представить в виде плоской волны с волновым вектором $\vec{K}\parallel OZ$. Тогда из условия соленоидальности крупномасштабного магнитного поля $\vec{K}\vec{H}=0$ следует, что магнитное поле имеет только две компоненты H_r и H_φ. Для «квазидвумерных» крупномасштабных полей (52) система уравнений (30)-(35) упрощается:

$$\partial_T W_r+\partial_Z(T_{zr}-QM_{zr})=\partial_Z{}^2W_r \tag{54}$$

$$\partial_T W_\varphi+\partial_Z(T_{z\varphi}-QM_{z\varphi})=\partial_Z{}^2W_\varphi \tag{55}$$

$$\partial_T H_r-\partial_Z G_{rz}=Pm^{-1}\partial_Z{}^2H_r \tag{56}$$

$$\partial_T H_\varphi-\partial_Z G_{\varphi z}=Pm^{-1}\partial_Z{}^2H_\varphi \tag{57}$$

Замкнутый вид система уравнений (54)-(57) принимает, если вычислить корреляторы $S_{zr}=T_{zr}-QM_{zr}$, $S_{z\varphi}=T_{z\varphi}-QM_{z\varphi}$, G_{rz}, $G_{\varphi z}$. Для этой цели нам потребуются решения для мелкомасштабных полей (46)-(51). После проведения несложных, но громоздких математических вычислений выражения для корреляторов

$$S_{zr}=T_{zr}-QM_{zr}=\frac{f_0^2}{2}\frac{2D\kappa q_2\left(1+Pm(1-q_2)\right)}{16(1-mD-W_2)^2+\left[4-(1-mD-W_2)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_2}-$$

имеют следующий вид: (58)

$$-\frac{f_0^2}{8}\frac{4D^2\left(1+Pm(1-q_1)\right)}{16(1-mD-W_1)^2+\left[4-(1-mD-W_1)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_1}$$

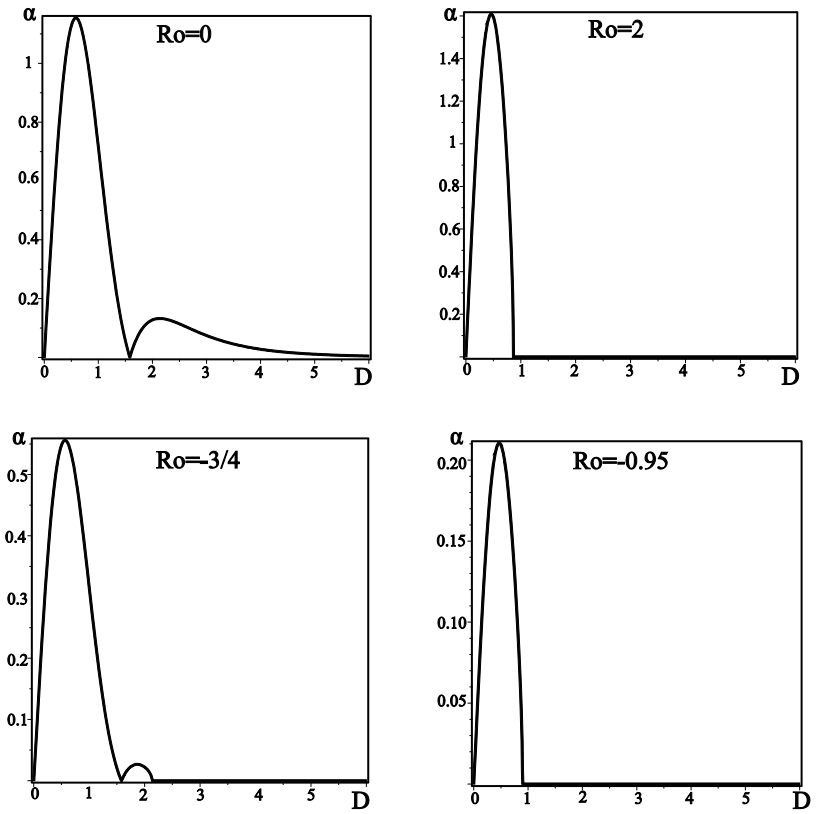

Рис. 1. *Зависимость гидродинамического (ГД) α^* -эффекта от параметра вращения D для различных чисел Россби Ro при $m=0$*

$$S_{z\varphi}=T_{z\varphi}-QM_{z\varphi}=-\frac{f_0^2}{2}\frac{2Dq_1\left(1+Pm\left(1-q_1\right)\right)}{16\left(1-mD-W_1\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_1\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_1}-$$
$$-\frac{f_0^2}{8}\frac{4D^2\kappa^2\left(1+Pm\left(1-q_2\right)\right)}{16\left(1-mD-W_2\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_2\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_2}+S_{z\varphi}^{доп}(Ro) \qquad (59)$$

В формулах (58)-(59) приняты следующие обозначения:

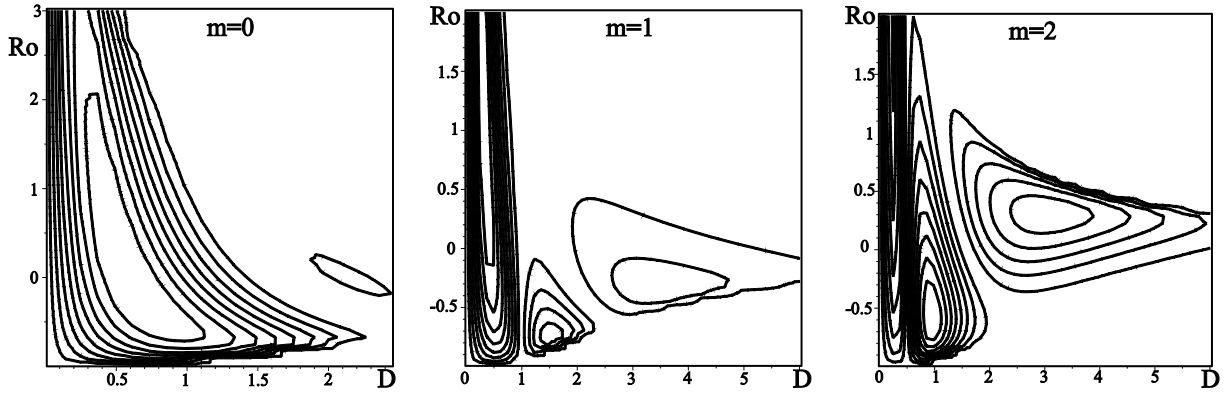

Рис. 2. *На плоскости* (Ro,D) *изображены области экстремальных значений коэффициента α^* в зависимости от азимутального числа m*

$$q_{1,2}=1+\frac{Ha^2(H_{1,2}+B_0)^2}{4+Pm^2\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2}=2\mu_{1,2}\left(4+\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2\right)^2+\mu_{1,2}^2\left(4+\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2\right)^2+4(1+Ro)\,\mathrm{D}^2\,\delta_{1,2}$$

$$\mu_{1,2}=\frac{Ha^2(H_{1,2}+B_0)^2}{\left(4+\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2\right)\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2\right)}\left[2\left(4+Pm\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2\right)+Ha^2(H_{1,2}+B_0)^2\right]$$

$$\delta_{1,2}=\frac{Ha^2(H_{1,2}+B_0)^2}{4+Pm^2\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2}\cdot\left[2\left(4+Pm\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2\right)+Ha^2(H_{1,2}+B_0)^2\cdot\frac{4-Pm^2\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2}{4+Pm^2\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2}\right]$$

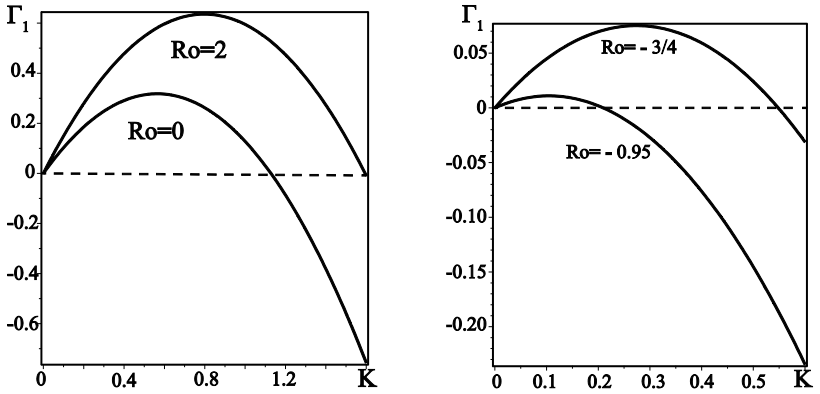

Рис. 3. *График зависимости инкремента неустойчивости для ГД* α^* *-эффекта от волновых чисел* K *и различных чисел Россби* Ro *при параметре вращения* $D=0{,}5$ *и* $m=0$

Дополнительный член $S_{z\varphi}^{доп}(Ro)$, обусловленный неоднородным вращением среды, выражается через число Россби Ro:

$$S_{z\varphi}^{доп}(Ro)=-Ro\frac{f_0^2}{2}\frac{2PmD^2Ha^2(H_2+B_0)^2}{16\left(1-mD-W_2\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_2\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_2}\cdot\frac{4-Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2}{4+Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2}+$$

$$+Ro\frac{f_0^2}{8}\frac{16Pm^2\kappa^2D^3Ha^2(H_1+B_0)^2}{\left(16\left(1-mD-W_1\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_1\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_1\right)\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_1\right)^2\right)^2}-$$

$$-Ro\frac{f_0^2}{2}\frac{2Pm^2\kappa D^2Ha^2(H_2+B_0)^2}{\left(16\left(1-mD-W_2\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_2\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_2\right)\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2\right)^2}\times$$

$$\times\left[4+Pm\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2+Ha^2(H_{1,2}+B_0)^2\cdot\frac{4-Pm^2\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2}{4+Pm^2\left(1-mD-W_{1,2}\right)^2}\right]$$

В предельном случае $\sigma=0$ неэлектропроводящей и вращающейся с постоянной угловой скоростью $\Omega=const$ жидкости формулы (58)-(59) переходят к уже известным результатам из работы [26] для напряжений Рейнольдса. Переходим к вычислениям последней группы корреляторов, входящих в уравнения для крупномасштабного магнитного поля (56)-(57). Для этого нам также потребуются выражения как для мелкомасштабного поля скорости (46)-(48), так и для магнитного поля (49)-(51). Используя аналогичную методику вычисления корреляторов, получим следующие выражения для G_{rz} и $G_{\varphi z}$:

$$G_{rz}=-f_0^2\frac{2D\kappa\left(1-mD-W_2\right)Pm\left(1+Pm(1-q_2\right)(H_2+B_0)}{\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2\right)\left[16\left(1-mD-W_2\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_2\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_2\right]}=$$
$$=-\alpha_{W_2}^{NL}\cdot(H_2+B_0) \tag{60}$$

$$G_{\varphi z}=f_0^2\frac{2D\left(1-mD-W_1\right)Pm\left(1+Pm(1-q_1\right)(H_1+B_0)}{\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_1\right)^2\right)\left[16\left(1-mD-W_1\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_1\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_1\right]}+$$
$$+G_{\varphi z}^{доп}(Ro)=\alpha_{W_1}^{NL}\cdot(H_1+B_0)+\beta_{W_{1,2}}^{доп}(Ro)\cdot(H_{1,2}+B_0) \tag{61}$$

В формуле (61) появился дополнительный нелинейный коэффициент $\beta_{W_{1,2}}^{доп}(Ro)$, который связан с неоднородностью вращения среды и выражается через число Россби Ro:

$$\beta_{W_{1,2}}^{доп}(Ro)\cdot(H_{1,2}+B_0)=$$

$$=Ro\cdot f_0^2\frac{4\kappa D^2Q\left(1-mD-W_2\right)Pm^3(H_2+B_0)^3}{\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2\right)^2\left[16\left(1-mD-W_2\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_2\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_2\right]}+$$

$$+Ro\cdot f_0^2\frac{4D^3\left(1-mD-W_1\right)Pm^3(H_1+B_0)}{\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_1\right)^2\right)^2\left[16\left(1-mD-W_1\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_1\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_1\right]}+$$

$$+Ro\cdot f_0^2\frac{\kappa D^2\left(1-mD-W_2\right)Pm^2(H_2+B_0)}{\left(4+Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2\right)^2\left[16\left(1-mD-W_2\right)^2+\left[4-\left(1-mD-W_2\right)^2+2D^2\kappa\right]^2+\varepsilon_2\right]}\times$$

$$\times\left[4QPm(H_2+B_0)^2+4(2Pm-1)+Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2+Q(H_2+B_0)^2\cdot\frac{12-Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2}{4+Pm^2\left(1-mD-W_2\right)^2}\right]$$

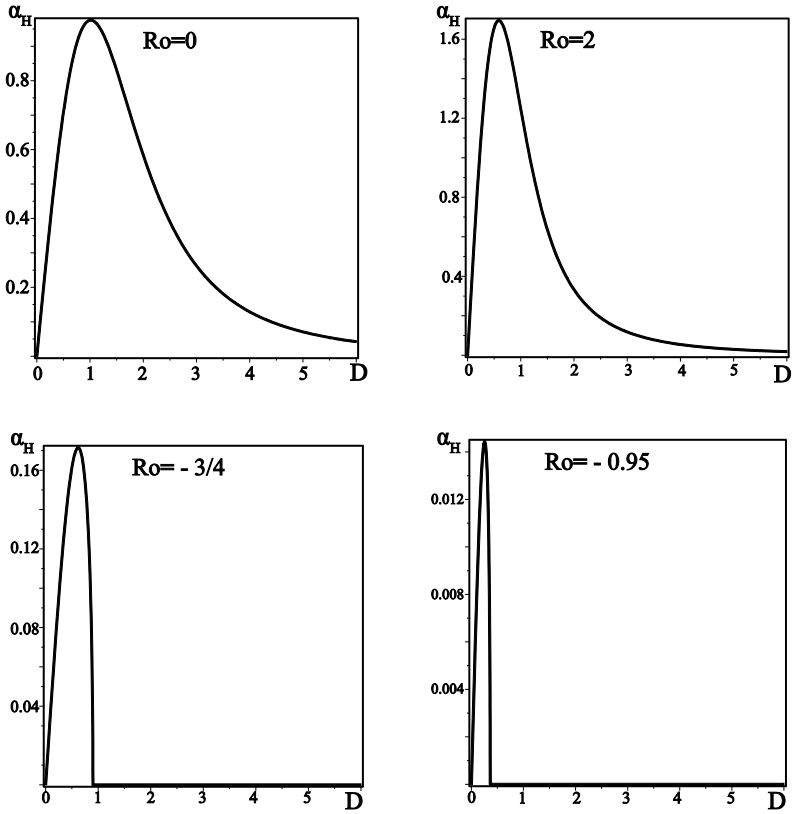

Рис. 4. *Зависимость магнитогидродинамического (МГД) α_H^* -эффекта от параметра вращения D для различных чисел Россби Ro при $Pm=1$ и $m=0$*

Таким образом, на основании проведенных в настоящем разделе вычислений корреляторов S_{zr}, $S_{z\varphi}$, G_{rz}, $G_{\varphi z}$ мы получили замкнутые уравнения (54)-(57) (с учётом (58)-(61)) для крупномасштабной скорости $\left(W_1,W_2\right)$ и магнитного поля $\left(H_1,H_2\right)$. Эти уравнения соответствуют основным уравнениям нелинейного магнитовращательного (МВ) динамо в неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной силой. Если эффект вращения исчезнет ($\Omega=0$), то происходит обычное диффузионное расплывание крупномасштабных полей. В случае когда внешнее однородное магнитное поле отсутствует ($B_0=0$), систему уравнений для описания эволюции крупномасштабной скорости $\left(W_1,W_2\right)$ и магнитного поля $\left(H_1,H_2\right)$ назовём нелинейными уравнениями магнито-вихревого динамо. В рамках асимптотического метода многомасштабных разложений оказывается проще построить линейную теорию из полученных нелинейных уравнений,

нежели изначально использовать линейное приближение [15]. Далее мы рассмотрим устойчивость малых возмущений полей (линейная теория) при условии $B_0 = 0$.

4. Генерация вихревых и магнитных полей крупномасштабной неустойчивостью

Рассмотрим начальную стадию развития возмущений (W_1, W_2) и (H_1, H_2). Тогда при малых значениях величин (W_1, W_2) и (H_1, H_2) и отсутствии внешнего однородного магнитного поля ($B_0 = 0$) уравнения (54)-(57) линеаризуются и сводятся к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_1 \nabla_Z W_1 + \kappa\alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0 \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 - \kappa^2 \alpha_1 \nabla_Z W_2 - \alpha_2 \nabla_Z W_1 = 0 \end{cases}, \tag{62}$$

$$\begin{cases} \partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 + \alpha_H \nabla_Z H_2 = 0 \\ \partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 - \alpha_H^{(2)} \nabla_Z H_2 - (\alpha_H + \alpha_H^{(1)}) \nabla_Z H_1 = 0 \end{cases}, \tag{63}$$

где введены следующие обозначения для коэффициентов:

$$\alpha_1 = f_0^2 \frac{2D^2(1-mD)\left(5 - 2D^2(1+Ro)\right)}{\left(\left(2(1+Ro)D^2 + 4 - (1-mD)^2\right)^2 + 16(1-mD)^2\right)^2} \tag{64}$$

$$\alpha_2 = f_0^2 \frac{4D(1-mD)\left(5 - 2D^2(1+Ro)\right)}{\left(\left(2(1+Ro)D^2 + 4 - (1-mD)^2\right)^2 + 16(1-mD)^2\right)^2} \tag{65}$$

$$\alpha_H = f_0^2 \frac{2D\kappa Pm\left(1-mD\right)}{\left(4 + Pm^2(1-mD)^2\right)\left(\left(2(1+Ro)D^2 + 4 - (1-mD)^2\right)^2 + 16(1-mD)^2\right)} \tag{66}$$

$$\alpha_H^{(1)} = Ro \cdot f_0^2 \frac{4D^3 Pm^3\left(1-mD\right)}{\left(4 + Pm^2(1-mD)^2\right)^2\left(\left(2(1+Ro)D^2 + 4 - (1-mD)^2\right)^2 + 16(1-mD)^2\right)} \tag{67}$$

$$\alpha_H^{(2)} = Ro \cdot f_0^2 \frac{\kappa D^2 Pm^3\left(1-mD\right)(4(2Pm-1) + Pm^2(1-mD)^2)}{\left(4 + Pm^2(1-mD)^2\right)^2\left(\left(2(1+Ro)D^2 + 4 - (1-mD)^2\right)^2 + 16(1-mD)^2\right)} \tag{68}$$

Как видно из системы уравнений (62)-(63), при малых возмущениях полей и $B_0 = 0$ происходит расщепление самосогласованной системы уравнений (54)-(57) на две пары уравнений для крупномасштабного поля скорости $\vec{W}$ и магнитного поля $\vec{H}$ соответственно. Первая пара уравнений (62) подобна уравнениям для вихревого динамо [15; 32; 33], отличие от которых состоит в появлении дополнительного конвективного члена с α_1. Посредством коэффициента α_2 устанавливается положительная обратная связь, с помощью которой возможна генерация крупномасштабных вихревых структур. Вторая пара уравнений (63) описывает хорошо известный из теории динамо [8; 14; 28] α_H-эффект: усиление крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Отличие от «классического» α_H-эффекта [8] состоит в появлении во втором уравнении системы (63) дополнительного конвективного члена с $\alpha_H^{(1)}$ и коэффициента усиления $\alpha_H^{(2)}$, связанных с неоднородностью вращения среды. Отметим, что в рассматриваемой здесь линейной теории коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_H, \alpha_H^{(1)}, \alpha_H^{(2)}$ не зависят от амплитуд полей, а зависят только от безразмерных параметров вращения D, магнитного числа Прандтля Pm и амплитуды внешней силы f_0. Для исследования крупномасштабной неустойчивости, описываемой системой уравнений (62)-(63), выберем возмущения в виде плоских волн с волновым вектором $\vec{K} \parallel OZ$, т.е.

$$\begin{pmatrix} W_{1,2} \\ H_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{W_{1,2}} \\ A_{H_{1,2}} \end{pmatrix} \exp\left(-i\omega T + iKZ\right) \tag{69}$$

Подставляя (69) в систему уравнений (62)-(63), получим дисперсионные уравнения:

$$(K^2 - i\omega)^2 - i\alpha_1 K(\kappa^2 + 1)(K^2 - i\omega) - (\alpha_1^2 \kappa^2 + \kappa\alpha_2^2)K^2 = 0 \tag{70}$$

$$(\mathrm{Pm}^{-1} K^2 - i\omega)^2 - i\alpha_H^{(2)} K(\mathrm{Pm}^{-1} K^2 - i\omega) - \alpha_H(\alpha_H + \alpha_H^{(1)})K^2 = 0 \tag{71}$$

Представив $\omega = \omega_0 + i\Gamma$, из уравнений (70)-(71) находим:

$$\omega_{01} = Re\omega_1 = -\frac{\alpha_1}{2}K, \ \Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm\sqrt{\kappa\alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{4}(\kappa^2 - 1)^2}K - K^2 = \pm\alpha^* K - K^2 \tag{72}$$

$$\omega_{02} = Re\omega_2 = -\frac{\alpha_H^{(2)}}{2}K\ ,\ \Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm\sqrt{\alpha_H(\alpha_H^{(1)}+\alpha_H) - \frac{(\alpha_H^{(2)})^2}{4}K - K^2} = \pm\alpha_H^* K - K^2 \qquad (73)$$

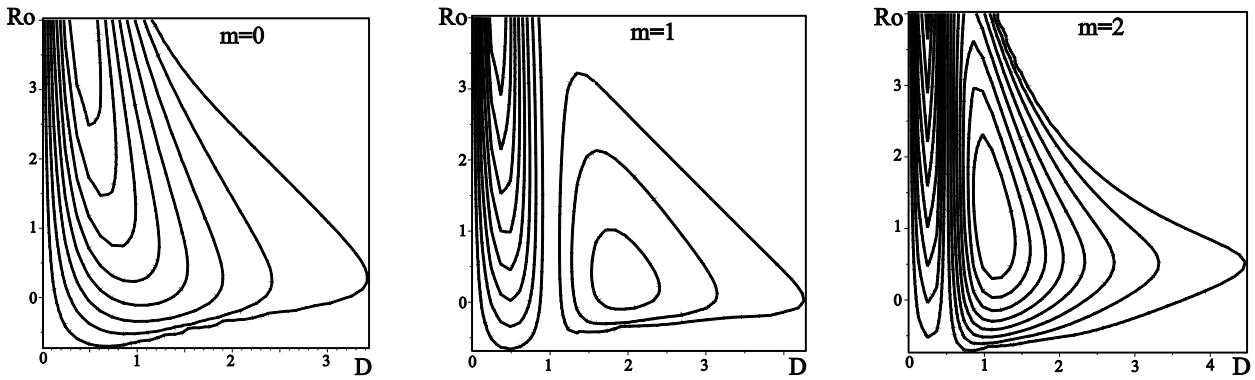

Рис. 5. *На плоскости* $(\mathrm{Ro}, \mathrm{D})$ *изображены области экстремальных значений коэффициента* α_H^* *в зависимости от азимутального числа* m *(при* $Pm = 1$*)*

Решения (72) показывают на существование неустойчивых колебательных решений для крупномасштабных вихревых возмущений в неоднородно вращающейся электропроводящей среде, если выполняется условие $(\alpha^*)^2 > 0$. Максимальный инкремент неустойчивости $\Gamma_{1max} = \frac{(\alpha^*)^2}{4}$ достигается на волновых числах $K_{max} = \frac{\alpha^*}{2}$. Аналогично для крупномасштабных магнитных возмущений из формулы (73) следует условие возникновения неустойчивости $(\alpha_H^*)^2 > 0$. Максимальный инкремент неустойчивости $\Gamma_{2max} = \frac{(\alpha_H^*)^2}{4}Pm$ достигает своего значения при волновых числах $K_{max} = \frac{\alpha_H^*}{2}Pm$.

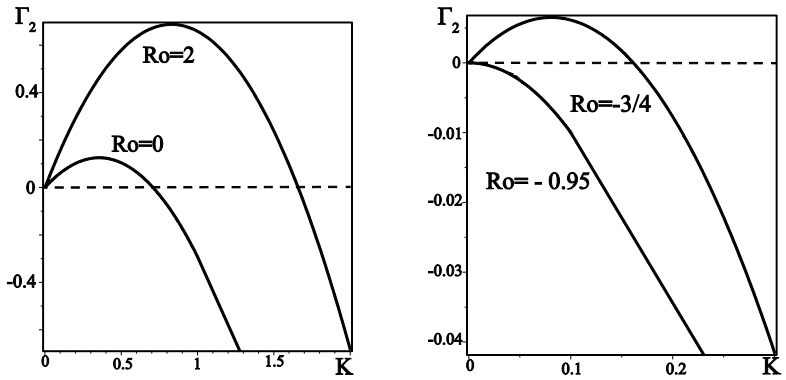

Рис. 6. *График зависимости инкремента неустойчивости для МГД* α_H^* *-эффекта от волновых чисел* K *и различных чисел Россби* Ro *при параметре вращения* $D = 0{,}5$, $Pm = 1$ *и* $m = 0$

5. *Обсуждение полученных результатов*

Полученные в настоящей работе инкременты крупномасштабной неустойчивости (72)-(73) показывают, что коэффициенты α^* и α_H^* ответственны за генерацию вихревых и магнитных полей. В связи с этим проведем анализ этих коэффициентов для различных профилей угловой скорости вращения среды. Выбирая определенный уровень турбулентных осцилляций, положим безразмерную амплитуду внешней силы f_0 равной $f_0 = 10$. Результаты численного анализа зависимости коэффициента усиления вихревых возмущений α^* от параметра вращения D для различных чисел Россби Ro и азимутального числа $m = 0$ показаны на Рис. 1, откуда видно, что в случае однородного вращения среды ($Ro = 0$) при малых значениях D появляются два экстремальных значения коэффициента α^*: $\alpha_{1\max}^* > \alpha_{2\max}^*$. Существует также значение параметра вращения $D = D_\alpha$, при котором $\alpha^* = 0$, т.е. генерации крупномасштабных вихревых возмущений не происходит.

Аналогичная ситуация возникает и при кеплеровском профиле вращения $Ro = -3/4$ (см. Рис. 1). Далее, при увеличении вращения среды, становятся существенными члены порядка D^2, которые приводят к уменьшению величины коэффициента α^*, что означает подавление гидродинамического (ГД) α^*-эффекта. Если среда вращается неоднородно, и профиль угловой скорости вращения соответствует числу Россби $Ro = 2$, то максимальное значение коэффициента $\alpha^*(Ro = 2)$ превосходит максимальное значение коэффициента α^* для однородного вращения ($Ro = 0$): $\alpha^*(Ro = 2) > \alpha^*_{1\max}$. Затем при увеличении параметра $D > D_{\max}(Ro = 2)$ происходит уменьшение α^* до нуля, и, как следствие, в этом случае генерация вихревых возмущений невозможна. Она неэффективна и при близком к рэлеевскому профилю вращения $Ro = -0,95$, поскольку $\alpha^*_{\max}(Ro = -3/4) \gg \alpha^*_{\max}(Ro = -0,95)$. Очевидно, что в случае рэлеевского профиля вращения среды $Ro = -1$ ($\kappa = 0$) генерации крупномасштабных вихревых возмущений не происходит (см. формулу (72)). Здесь мы наблюдаем затухание крупномасштабных вихревых осцилляций на вязкости. На Рис. 2 изображены численные расчеты коэффициента усиления α^* для различных азимутальных чисел m ($m = 0,1,2$) в плоскости (Ro, D). При этом отчетливо видна возможность генерации крупномасштабных вихревых возмущений для мод с $m \neq 0$. На Рис. 3 изображен график скорости роста Γ_1 вихревых возмущений относительно волновых чисел K при фиксированном параметре вращения $D = 0,5$ и для различных профилей вращения (чисел Россби). Это – типичный график для α-эффекта в теории динамо [Там же]. На Рис. 4 изображены результаты численных расчетов коэффициента усиления магнитных возмущений α^*_H в зависимости от изменений параметра вращения D для различных профилей неоднородного вращения Ro и магнитного числа Прандтля $Pm = 1$. Для чисел Россби $Ro = 0$ и $Ro = 2$ МГД α^*_H-эффект также увеличивается при «медленном» вращении до некоторого максимального значения $\alpha^*_{H\max}$, после которого при увеличении параметра D («быстрое» вращение) наблюдается спад коэффициента α^*_H, т.е. происходит подавление МГД α^*_H-эффекта. В случае кеплеровского профиля $Ro = -3/4$ и близкого к рэлеевскому $Ro = -0,95$ генерация крупномасштабного магнитного поля возможна на малом интервале изменений параметра D. Естественно, что для рэлеевского профиля $Ro = -1$ генерации магнитного поля не происходит, поскольку $\alpha_H = 0$ и $\alpha^{(2)}_H = 0$. Наиболее наглядно видны области экстремальных значений коэффициента α^*_H (участки с $Ro > 0$) на Рис. 5 в плоскости (Ro, D) при разных значениях азимутального числа m. На Рис. 6 изображены темпы роста магнитного поля для разных масштабов возмущений $L \simeq K^{-1}$ и различных профилей неоднородного вращения Ro при фиксированных параметрах $D = 0,5$ и $Pm = 1$. Представленные на графиках (Рис. 6) зависимости инкремента Γ_2 от волнового числа K аналогичны по виду для α-эффекта в теории динамо [Там же]. Таким образом, рэлеевский профиль вращения $\Omega \simeq R^{-2}$ ($Ro = -1$), имеющий самый низкий порог устойчивости течения Куэтта [9], не эффективен для механизма турбулентного динамо, рассмотренного в настоящей работе. Генерация крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений в неоднородно вращающейся электропроводящей среде наиболее эффективна для профилей вращения с положительным числом Россби $Ro > 0$. В следующей работе будет проведено исследование устойчивости крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений в неоднородно вращающейся электропроводящей среде с учетом внешнего однородного магнитного поля.

Список литературы

1. **Велихов Е. П.** Устойчивость течения идеально проводящей жидкости между вращающимися цилиндрами в магнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1959. Т. 36. С. 1398-1404.
2. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 264 с.
3. **Горшунов Н. М., Потанин Е. П.** Влияние холловских эффектов на устойчивость вращающейся плазмы // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1. № 2. С. 178-182.
4. **Горшунов Н. М., Потанин Е. П.** Границы устойчивости вращающейся вязкой плазмы в магнитном поле // Успехи прикладной физики. 2014. Т. 2. № 1. С. 18-23.
5. **Карчевский А. И., Потанин Е. П.** Плазменные центрифуги. Изотопы. Свойства, получение, применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 700 с.
6. **Кляцкин В. И.** Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 337 с.
7. **Копп М. И., Тур А. В., Яновский В. В.** Нелинейная теория динамо // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 241-266.
8. **Краузе Ф.**, **Рэдлер К.-Х.** Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. 314 с.
9. **Лахин В. П.** Неустойчивости и волны во вращающейся плазме и турбулентная генерация регулярных структур: дисс. … д. ф.-м. н. М.: НИЦ «Курчатовский институт», 2013. 257 с.
10. **Лахин В. П., Ильгисонис В. И.** О влиянии диссипативных эффектов на неустойчивости дифференциально-вращающейся плазмы // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2010. Т. 137. Вып. 4. С. 783-788.
11. **Михайловский А. Б., Ломинадзе Дж. Г., Чуриков А. П., Пустовитов В. Д.** Прогресс в теории неустойчивостей вращающейся плазмы // Физика плазмы. 2009. Т. 35. С. 307-350.

12. **Новиков Е. А.** Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1964. Т. 47. Вып. 5 (11). С. 1919-1926.
13. **Педлоски Дж.** Геофизическая гидродинамика: в 2-х т. / пер. с англ. М.: Мир, 1984. 398 с.
14. **Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М.** Магнитные поля галактик. М.: Наука, 1988. 279 с.
15. **Тур А. В., Яновский В. В.** Гидродинамические вихревые структуры. Харьков: НТК «Институт монокристаллов» НАН Украины, 2012. 294 с.
16. **Федотовский В. С., Логинов Н. И., Михеев А. С., Верещагина Т. И., Тереник Л. В., Прохоров Ю. П.** Экспериментальная установка для исследования магнитовращательной неустойчивости // Пути ученого. Е. П. Велихов / под общ. ред. ак. В. П. Смирнова. М.: РНЦ «Курчатовский институт», 2007. С. 167-175.
17. **Шалыбков Д. А.** Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. № 9. С. 971-993.
18. **Balbus S., Hawley J.** A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disk. I. Linear Analysis // Astrophysical Journal. 1991. Vol. 376. P. 214-222.
19. **Banibrata M., Amit K. Ch.** Stochastically Driven Instability in Rotating Shear Flows [Электронный ресурс]. URL: http://eprints.aston.ac.uk/17999/ (дата обращения: 14.04.2016).
20. **Chandrasekhar S.** The Stability of Non-Dissipative Couette Flow in Hydromagnetics // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1960. Vol. 46. P. 253-257.
21. **Frishe U., She Z. S., Sulem P. L.** Large Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1987. Vol. 28. P. 382-392.
22. **Goodman J., Ji H.** Magnetorotational Instability of Dissipative Couette Flow // Journal of Fluid Mechanics. 2002. Vol. 462. P. 365-382.
23. **Kirillov O. N., Stefani F.** Extending the Range of the Inductionless Magnetorotational Instability [Электронный ресурс]. URL: https://www.researchgate.net/publication/237012585_Extending_the_Range_of_the_Inductionless_Magnetorotational_Instability (дата обращения: 14.04.2016).
24. **Kirillov O. N., Stefani F.** Standard and Helical Magnetorotational Instability [Электронный ресурс]. URL: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10440-012-9689-z (дата обращения: 14.04.2016).
25. **Kirillov O. N., Stefani F., Fukumoto Y.** Local Instabilities in Magnetized Rotational Flows: A Short-Wavelength Approach [Электронный ресурс]. URL: http://istina.msu.ru/publications/article/7586145/ (дата обращения: 14.04.2016).
26. **Kopp M., Tur A., Yanovsky V.** The Large Scale Instability in Rotating Fluid with Small Scale Force // Open Journal of Fluid Dynamics. 2015. Vol. 5. P. 128-138.
27. **Papaloizou J., Szuszkiewich E.** The Stability of a Differentially Rotating Disk with a Poloidal Magnetic Field // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 1992. Vol. 66. P. 223-242.
28. **Rudiger G., Kitchatinov L., Hollerbach R.** Magnetic Processes in Astrophysics. Theory, Simulation, Experiments. Weinheim, 2013. 346 p.
29. **Shakura N., Postnov K.** On Properties of Velikhov-Chandrasekhar MRI in Ideal and Non-Ideal Plasma [Электронный ресурс]. URL: http://istina.msu.ru/publications/article/8977545/ (дата обращения: 14.04.2016).
30. **Squire J., Bhattacharjee A.** Statistical Simulation of the Magnetorotational Dynamo [Электронный ресурс]. URL: http://arxiv.org/find/all/1/all:+AND+Dynamo+AND+Magnetorotational+AND+the+AND+of+AND+Statistical+Simulation/0/1/0/all/0/1 (дата обращения: 14.04.2016).
31. **Sujit K. N., Banibrata M., Amit K. Ch.** Magnetohydrodynamic Stability of Stochastically Driven Accretion Flows [Электронный ресурс]. URL: http://arxiv.org/find/all/1/all:+AND+Accretion+AND+Driven+AND+Stochastically+AND+of+AND+Magnetohydrodynamic+Stability/0/1/0/all/0/1 (дата обращения: 14.04.2016).
32. **Tur A. V., Yanovsky V. V.** Large-Scale Instability in Hydrodynamics with Stable Temperature Stratification Driven by Small-Scale Helical Force [Электронный ресурс]. URL: http://arxiv.org/find/all/1/OR+au:Large_Scale+all: +AND+Temperature+AND+Stable+AND+with+AND+Hydrodynamics+AND+in+AND+EXACT+Large_Scale+Instability/0/1/0/all/0/1 (дата обращения: 14.04.2016).
33. **Tur A. V., Yanovsky V. V.** Non Linear Vortex Structures in Stratified Fluid Driven by Small-Scale Helical Force // Open Journal of Fluid Dynamics. 2013. Vol. 3. P. 64-74.

LARGE-SCALE MAGNET-ROTARY DYNAMO. I. LINEAR THEORY WITHOUT EXTERNAL MAGNETIC FIELD

Kopp Mikhail Iosifovich, Ph. D. in Physical-Mathematical Sciences
Kharkiv, Ukraine
michael.kopp@mail.ru

The paper investigates the dynamics of large-scale fields (vortex and magnetic ones) in heterogeneously rotating electrically conducting fluid in the axial homogeneous magnetic field of small-scale turbulence. The non-linear equations of the magnet-rotary dynamo in the third order of perturbation theory on the small Reynolds number are obtained. The paper studies the linear stage of the generation of large-scale vortex and magnetic fields in the absence of external homogeneous magnetic field resulting from the instability of α -effect type. Through numerical methods, the author reveals the criteria of the generation of large-scale vortex and magnetic fields depending on the profile of the angular velocity of medium rotation.

Key words and phrases: small-scale turbulence; large-scale instability; magnet-rotary instability; multiscale asymptotic expansions; α -effect.