

Тарасова Валентина Васильевна, Тарасов Василий Евгеньевич

### **ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПАМЯТЬЮ**

В статье рассматриваются понятие предельной полезности и методы описания экономических процессов, в которых учитывается зависимость настоящего состояния субъекта не только от бесконечно близких предыдущих состояний (то есть производные целого порядка), но также и от всех предыдущих состояний на конечном интервале времени. Показывается необходимость учета памяти у экономических субъектов в моделях экономического поведения потребителей. Для обобщения понятия предельной полезности, позволяющего описывать поведение экономических субъектов с памятью, используются производные нецелого порядка.

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2016/7/28.html](http://www.gramota.net/materials/1/2016/7/28.html)

**Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.**

Источник

#### **Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2016. № 7 (109). С. 108-113. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2016/7/](http://www.gramota.net/materials/1/2016/7/)

#### **© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

17. Tarasov V. E. Large Lattice Fractional Fokker-Planck Equation // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2014. Vol. 2014. № 9. Article ID P09036. 23 p.
18. Tarasov V. E. Lattice Fractional Calculus // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 257. P. 12-33.
19. Tarasov V. E. Three-Dimensional Lattice Approach to Fractional Generalization of Continuum Gradient Elasticity // Progress in Fractional Differentiation and Applications. 2015. Vol. 1. № 4. P. 243-258.
20. Tarasov V. E. Toward Lattice Fractional Vector Calculus // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2014. Vol. 47. № 35. Article ID 355204. 51 p.
21. Tarasov V. E. United Lattice Fractional Integro-Differentiation // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19. № 3. P. 625-664.
22. Tarasov V. E. What Discrete Model Corresponds Exactly to Gradient Elasticity Equation? // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2016. Vol. 11 (в печати).

### EXACT FINITE DIFFERENCES: A BRIEF OVERVIEW

Tarasov Vasily Evgen'evich, Doctor in Physical-Mathematical Sciences  
*Lomonosov Moscow State University*  
v.e.tarasov@bk.ru

The article defines a new notion of discrete mathematics – exact finite differences. A linear difference operator is called an exact finite difference of the order  $k$ , if the action of this operator within the space of entire functions coincides with the action of a derivative of the order  $k$ . Correspondence between differential calculus and calculus of finite differences is seen not in passage to the limit at the discretization interval tending to zero, but in the subordination of the mathematical operators of these two theories in many cases to the same rules. The paper offers a brief overview of the basic properties of exact finite differences in the space of entire functions.

*Key words and phrases:* finite differences; non-standard sampling; exact sampling; exact finite differences; difference operator of fraction order.

УДК 330.1

**Экономические науки**

*В статье рассматриваются понятие предельной полезности и методы описания экономических процессов, в которых учитывается зависимость настоящего состояния субъекта не только от бесконечно близких предыдущих состояний (то есть производные целого порядка), но также и от всех предыдущих состояний на конечном интервале времени. Показывается необходимость учета памяти у экономических субъектов в моделях экономического поведения потребителей. Для обобщения понятия предельной полезности, позволяющего описывать поведение экономических субъектов с памятью, используются производные нецелого порядка.*

*Ключевые слова и фразы:* экономический субъект; предельная полезность; экономическое поведение; эрентарность; эффект памяти.

**Тарасова Валентина Васильевна**

**Тарасов Василий Евгеньевич**, д. ф.-м. н.

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*  
v.v.tarasova@mail.ru; v.e.tarasov@bk.ru

### ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПАМЯТЬЮ

#### 1. Экономическое поведение субъектов и наличие памяти

В 70-е годы XIX века возникла маржиналистская экономическая теория, в центре которой стоял субъект с его потребностями. В качестве исходного пункта этой теории была принята субъективная мотивировка экономического поведения субъектов [2]. Для описания такого поведения в определениях предельных показателей стали использовать математический аппарат производных целого порядка.

Использование производных только целого порядка означает, что при описании процесса пренебрегают наличием памяти у экономических субъектов. Другими словами, в маржиналистской экономической теории все субъекты предполагаются страдающими полной амнезией. Если предполагать, что экономические агенты и субъекты обладают памятью о прошлом экономического процесса, в котором они участвуют, то необходимо учитывать не только текущее состояние и бесконечно близкие к нему состояния, но и все предыдущие состояния данного процесса. Математически это означает, что для описания такого процесса недостаточно знания начальных значений параметров состояния и конечного числа производных целого порядка по времени для этих параметров. Другими словами, текущее состояние экономического процесса с памятью зависит

от предыдущей истории изменений этого процесса. Следует отметить, что в математике, помимо производных целых порядков, давно известны производные нецелых (дробных) порядков [3; 8; 10], которые сейчас активно применяются в естественных науках для описания процессов с памятью [8; 15].

По нашему мнению, экономическое поведение субъектов во многих экономических процессах может определяться наличием у них памяти. В этом случае в экономическом анализе следует использовать обобщения предельных показателей, учитывающие эффекты памяти. В качестве математического инструмента данного анализа могут использоваться производные нецелого порядка.

Фактически в маржиналистском подходе к описанию экономических процессов неявно предполагается наличие памяти у экономических агентов и субъектов. Для подтверждения этого можно обратиться к труду «Основания политической экономии» [2], написанному Карлом Менгером, – одним из основоположников маржинализма. В данной работе была разработана теория ценности и предельной полезности.

В своей книге Менгер определял понятие ценности следующим образом: «ценность есть значение, которое для нас имеют конкретные блага или количества благ вследствие того, что в удовлетворении своих потребностей мы сознаем зависимость от наличности их в нашем распоряжении» [Там же, с. 125]. Очевидно, что осознание наличия блага подразумевает, что осознающий субъект помнит о наличии или отсутствии этого блага при формировании своего экономического поведения. Менгер поясняет, что «ценность не есть нечто присущее благам, не свойство их, но наоборот – лишь то значение, которое мы, прежде всего, придаем удовлетворению наших потребностей, т.е. нашей жизни и нашему благосостоянию, а затем переносим на экономические блага, как на исключительные причины этого удовлетворения» [Там же, с. 128]. Далее он пишет: «Итак, ценность не есть нечто присущее благам, не свойство их, но также и не самостоятельная, не сама по себе существующая вещь. Ценность – это суждение, которое хозяйствующие люди имеют о значении находящихся в их распоряжении благ для поддержания их жизни и их благосостояния, и потому вне их сознания не существует» [Там же, с. 132].

По мнению Менгера: «Ценность, которую благо имеет для хозяйствующего индивида, равна значению того удовлетворения потребности, в отношении которого данный индивид находится в зависимости от наличности в его распоряжении соответственного блага» [Там же, с. 158]. Очевидно, что хозяйствующий индивид должен помнить, удовлетворял ли он свою потребность ранее или нет. Покупатель должен помнить, что он недавно покупал товар. Он должен помнить, какие товары (или услуги) он покупал ранее, в каком количестве и по какой цене. Будет ли покупатель приобретать новые товары или нет, может определяться тем, какая цена на этот товар была ранее, и как она менялась в течение прошедшего промежутка времени. Поведение потребителя также будет определяться тем, как менялось ранее количество благ, уже приобретенных им, и тем, как менялось ранее количество предлагаемых ему товаров и услуг. Более того, изменяться может и сам субъект, и его суждения о ценности тех или иных благ. Поэтому при описании экономического поведения субъектов необходимо учитывать эффекты памяти. Модели поведения субъектов с амнезией не отражают в полной мере реальных экономических процессов. Использование субъекта с его потребностями в маржиналистской экономической теории подразумевает, что этот субъект обладает памятью, а его поведение определяется не только его состоянием в данный момент времени. Однако использование производных целого порядка в определении предельной полезности позволяет учитывать только бесконечно малую окрестность данного момента времени и тем самым пренебречь эффектом памяти.

В результате мы можем сказать, что в центре маржиналистской экономической теории должен находиться не субъект с амнезией, а субъект с памятью. Необходимо учитывать, что субъект может помнить изменения на некотором конечном интервале времени самих благ и их стоимости, а также результаты удовлетворения своих потребностей этими благами.

## 2. Поведение потребителя, полезность и эффект памяти

В современной экономической теории используются модели поведения потребителя и понятие полезности. При этом акцентируется внимание на изучении закономерностей потребительского спроса, анализе предложения, исследовании рынков и ценообразования на микроэкономическом уровне. Теория поведения потребителя исходит из некоторых предпосылок. Прежде всего, предполагается, что потребитель всегда ведет себя рационально, т.е. стремится извлечь максимум полезности для себя, при этом «полезность» является субъективным понятием. Важнейшая характеристика полезности заключается в том, что полезность не имеет физического или материального существования, поскольку полезность существует в сознании потребителя. Полезность блага (товара или услуги) заключается в его способности удовлетворять какую-нибудь потребность субъекта. При этом у каждого субъекта может быть своя оценка полезности, которая не обязана совпадать со средней.

Одним из первых, кто высказывал идеи, ставшие важнейшей частью теории предельной полезности, был немецкий экономист Герман Госсен. Им был предложен закон о насыщении потребностей (первый закон Госсена). Согласно этому закону, с удовлетворением потребности в каком-либо благе его ценность падает, или по мере увеличения количества товара его полезность убывает. Другими словами, первый закон Госсена гласит, что при последовательном потреблении полезность каждой последующей единицы продукта ниже предыдущей. Первый закон Госсена был обобщен для предельной полезности и был сформулирован как закон убывания предельной полезности. Этот закон отражает взаимосвязь между количеством потребляемого блага и степенью удовлетворенности от потребления каждой дополнительной единицы.

Закон убывающей предельной полезности заключается в том, что с ростом потребления блага (при неизменном объеме потребления всех остальных) общая полезность, получаемая потребителем, возрастает,

но возрастает всё более медленно. Математически это описывается тем, что первая производная функции полезности по количеству данного блага – положительна, а вторая производная является отрицательной. Иначе говоря, закон убывающей предельной полезности гласит, что функция полезности возрастает и выпукла вверх. Свойство убывающей предельной полезности математически обусловлено вогнутостью функции полезности. Однако только при условии, что функция полезности является однозначной и дважды дифференцируемой, можно говорить, что первая производная – положительная, а вторая производная этой функции – отрицательна. В общем случае нельзя предполагать однозначность функций, описывающих полезность.

Как и любой закон, закон убывания предельной полезности имеет свои ограничения на применимость. Ограничения закона убывающей предельной полезности во многом обусловлены тем, что однозначность функции полезности может существовать лишь на коротком интервале времени. Среди ограничений на применимость закона выделяют отсутствие изменений у потребителя: не должны происходить изменения во вкусах, привычках, обычаях, предпочтениях и доходах потребителя. Изменение одного из этих факторов может изменить полезность продукта, и функция потребления станет неоднозначной. Другим ограничением является малость интервала времени. Все единицы продукта должны быть потреблены в течение небольшого интервала времени. Если между потреблением товара или услуги были некоторые промежутки времени, то потребление последующих единиц продукта даст удовлетворение, равносильное удовлетворению, полученному при потреблении предыдущих единиц продукта. Ограничением является также отсутствие изменений у потребляемого товара или услуги: товары и услуги не должны изменяться по цене, качеству, распространности и доступности во времени и в пространстве. Важнейшим ограничением является постоянство цены. Цены на продукт должны оставаться одинаковыми в течение рассматриваемого промежутка времени. Потребитель может отказаться от покупки или увеличить покупки лишь в силу изменения цены товара или услуги, а не потому, что изменилась оценка полезности товара. Очевидно, что в реальных экономических процессах одновременное выполнение этих условий встречается редко.

Тот факт, что функция полезности может быть неоднозначной, во многом связан с наличием памяти у экономических субъектов. Кроме этого, само убывание предельной полезности на коротком временном интервале тоже обусловлено наличием памяти у потребителя. Потребитель обладает памятью и помнит, что в прошедший промежуток времени он приобретал этот продукт (товар или услугу). Поэтому учет эффектов памяти в современной экономической теории, использующей модели поведения потребителя и понятие полезности, является необходимым для более адекватного описания экономических процессов. Для этого предлагается использовать новый тип предельной полезности – эредитарную предельную полезность. Эредитарность означает, что данный показатель учитывает не только настоящее состояние экономического субъекта и бесконечно близкие предыдущие состояния (то есть производные целого порядка по времени), но также и все предыдущие состояния, в которых находился субъект. Эредитарная предельная полезность должна учитывать, что состояние экономического субъекта зависит от его предыдущего экономического поведения, что означает наличие у субъекта памяти об изменениях экономического процесса в течение некоторого промежутка времени.

### 3. Ограниченность стандартных формул предельной полезности

Экономический смысл предельной полезности заключается в полезности, которую субъект получает от использования ещё одной дополнительной единицы блага. Другими словами, предельная полезность – это увеличение общей полезности при потреблении одной дополнительной единицы блага. Стандартная формула, определяющая предельную полезность  $M_U(Q)$ , имеет вид

$$M_U(Q) = \frac{dU(Q)}{dQ} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta Q}, \quad (1)$$

где  $U=U(Q)$  – функция полезности, а  $Q$  – количество потребляемого блага.

Важнейшим условием применимости формулы (1), задающей предельную полезность, является предположение, что полезность  $U=U(t)$  как функция времени может быть представлена в виде однозначной функции количества потребляемого блага  $Q=Q(t)$ , где  $t$  – временной параметр. В общем случае данное предположение не выполняется.

В случае неоднозначной зависимости полезности блага  $U(t)$  от количества блага  $Q(t)$  нельзя использовать формулу (1). Для получения более адекватной формулы предельной полезности следует использовать явные зависимости  $U(t)$  и  $Q(t)$  от времени и определять этот предельный показатель в виде

$$M_U(Q) = \frac{dU(t)/dt}{dQ(t)/dt}. \quad (2)$$

Если зависимость  $U(t)$  от  $Q(t)$  можно выразить однозначной дифференцируемой функцией  $U=U(Q)$ , исключив временной параметр  $t$ , то формулы (1) и (2) будут эквивалентны в силу правила дифференцирования сложной функции.

В общем случае зависимость  $U(t)$  от  $Q(t)$  нельзя выразить в виде однозначной дифференцируемой функции полезности  $U=U(Q)$ . При этом полезность и количество потребляемого блага практически всегда можно рассматривать как однозначные функции времени. В силу этого предельная полезность, определяемая формулой (2), будет давать более корректный результат. Однако этого недостаточно, поскольку неоднозначность

функции  $U=U(Q)$  может быть обусловлена наличием памяти в экономическом процессе. Одним из важнейших факторов, порождающих неоднозначность функции полезности, является наличие памяти у экономических субъектов. Субъекты могут помнить предыдущие изменения полезности блага  $U(t)$  и количества потребленного блага  $Q(t)$  и при повторных аналогичных изменениях  $U$  и  $Q$  реагировать уже по-другому, чем это делали ранее. Как следствие, полезность этого блага будет другой, несмотря на аналогичные изменения количества потребляемого блага. Это приводит к возникновению, как минимум, двух различных значений  $U$  для одного значения  $Q$ , что и порождает неоднозначность функции  $U=U(Q)$ . В результате мы приходим к выводу о необходимости обобщения понятия предельной полезности, которое будет учитывать не только неоднозначность зависимости  $U$  от  $Q$ , но и наличие памяти у экономического субъекта. Такую предельную полезность можно называть эредитарной (hereditary) или мемориальной (memory).

Следует подчеркнуть, что предельная полезность может зависеть от всех изменений  $U(t)$  и  $Q(t)$  на некотором конечном интервале времени, предшествующем рассматриваемому моменту  $t$ . Это обусловлено тем, что экономическое поведение субъектов во многом определяется наличием у них памяти. В экономическом анализе следует учитывать наличие у них памяти о предыдущих изменениях  $U(t)$  и  $Q(t)$  с течением времени. Предельные полезности, определяемые формулами (1) и (2), зависят только от заданного момента времени  $t$  и его бесконечно малой окрестности. Поэтому можно сказать, что формулы (1) и (2) применимы только при условии, что все субъекты экономической деятельности обладают полной амнезией. Очевидно, что данное приближение не всегда можно использовать для описания экономических процессов.

#### 4. Понятие производной нецелого порядка и эффект памяти

В связи со сказанным встает вопрос о математическом инструменте, который позволит определить новую (эредитарную) предельную полезность блага. Стандартные определения (1) и (2) предельной полезности используют понятие производной целого порядка. Однако помимо производных целых порядков, давно известны производные нецелых (дробных) порядков [3; 8; 10; 15]. Производные нецелого порядка обладают набором нестандартных свойств [16-18]. Например, нарушение стандартного правила Лейбница (правила дифференцирования произведения) является характеристическим свойством всех типов производных нецелого порядка [16; 17]. Стандартное выражение для дифференцирования сложной функции также нарушается [18]. Изучение производных нецелого порядка имеет длинную историю [1; 3; 9; 20]. Первое упоминание о возможности рассматривать производные порядка  $1/2$  встречается в письме Лейбница к Лопиталю от 30 сентября 1695 года. В настоящее время известны различные типы производных нецелого порядка, предложенные Риманом, Лиувилем, Риссом, Капуто, Летниковым, Маршо, Сониним, Вейлем [3; 8; 10]. Более того, производные и интегралы нецелых порядков активно применяются для описания различных физических процессов, характеризующихся памятью и нелокальностью [15]. Производные и интегралы нецелого порядка недавно были использованы для описания различных финансовых и экономических процессов в статьях [11-14; 21] и работах авторов [4-7; 19].

В недавних статьях [6; 7; 19] нами было предложено использовать производные нецелого порядка для определения эластичностей экономических процессов с эффектами памяти. Применение этого математического аппарата позволяет устранить амнезию покупателей в стандартной концепции эластичности. В статьях [Там же] мы использовали производную Капуто [10, р. 90-99]. Основной отличительной особенностью этой производной является то, что её действие на постоянную функцию дает ноль. Использование производной Капуто приводит к тому, что эластичность постоянного спроса будет равна нулю [19, р. 226]. В результате постоянный спрос при наличии памяти может интерпретироваться как совершенно неэластичный спрос (спрос не меняется при изменении цены). Предлагаемый подход был применен к анализу зависимости объемов биржевых торгов по доллару США от средневзвешенного курса доллара США на торгах ETC в 2014 и 2015 годах [5; 7].

Применение производных нецелого порядка по времени позволяет описывать процессы с памятью. Важнейшей особенностью памяти является свойство ее затухания (угасание памяти). В упрощенных моделях экономического поведения субъектов можно использовать предположение, что существует только один параметр, который характеризует степень угасания памяти об изменениях  $U(t)$  и  $Q(t)$  с течением времени  $t$ . Другими словами, можно использовать предположение, что затухание памяти об изменениях полезности некоторого блага и количества этого блага, потребленного ранее, характеризуется одним и тем же параметром затухания.

#### 5. Пример вычисления эредитарного предельного показателя

Пусть однозначная и дифференцируемая функция  $U=U(Q)$  выражает зависимость полезности блага  $U$  от количества потребляемого блага  $Q$ . Тогда функция, описывающая среднее приращение полезности на единицу блага, вычисляется по формуле:  $A_U(Q) = \frac{U(Q)}{Q}$ , а стандартное выражение для предельной полезности определяется формулой  $M_U(Q) = \frac{dU(Q)}{dQ}$ . При этом будем предполагать, что функция  $U=U(Q)$  однозначна и дифференцируема.

Рассмотрим сначала пример вычисления стандартной предельной полезности. Пусть зависимость между полезностью  $U$  и количеством блага  $Q$  выражается функцией

$$U(Q) = c_1 \cdot Q - c_2 \cdot Q^3, \quad (3)$$

где константы равны  $c_1 = 50$  и  $c_2 = 0,05$ . Вычислим среднюю и предельную полезности при отсутствии памяти у экономического субъекта для значения  $Q$  равного 10 единицам. Функция средней полезности задается

выражением  $A_U(Q) = \frac{U(Q)}{Q} = c_1 - c_2 \cdot Q^2$ . При  $Q=10$  средний показатель (на единицу блага) равен  $A_U(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45$ . Стандартная функция предельной полезности задается производной первого порядка

$$M_U(Q) = \frac{dU(Q)}{dQ} = c_1 - 3 \cdot c_2 \cdot Q^2.$$

Подставляя  $Q=10$  в это выражение, получаем предельную полезность

$$M_U(10) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 35.$$

В результате, при пренебрежении эффектом памяти, средняя полезность на единицу потребленного блага равна 45 ютилей, а предельная полезность равна 35 ютилям.

Рассмотрим теперь пример вычисления эредитарной полезности для экономического процесса с памятью. В простейшем случае предельное значение полезности для экономического процесса с памятью будет определяться формулой

$$M_U(Q, \alpha) = {}_0^C D_Q^\alpha U(Q), \quad (4)$$

где  ${}_0^C D_Q^\alpha$  – производная Капуто порядка  $\alpha > 0$  [10, р. 90-99]. Для целого порядка  $\alpha = 1$  формула (4) дает выражение (1) в виде

$$M_U(Q, 1) = {}_0^C D_Q^1 U(Q) = \frac{dU(Q)}{dQ} = M_U(Q). \quad (5)$$

Данная формула применима лишь при условии однозначности функции  $U=U(Q)$ . В общем случае однозначными функциями будут только зависимости полезности блага  $U$  и количества потребленного блага  $Q$  от времени, то есть функции  $U=U(t)$  и  $Q=Q(t)$ . В этом случае предлагается использовать формулу

$$M_{U(t)}(Q(t), \alpha) = \frac{{}_0^C D_t^\alpha U(t)}{{}_0^C D_t^\alpha Q(t)}. \quad (6)$$

Для целого порядка  $\alpha = 1$  формула (6) дает выражение (2) в виде

$$M_{U(t)}(Q(t), 1) = \frac{{}_0^C D_t^1 U(t)}{{}_0^C D_t^1 Q(t)} = \frac{dU(t)/dt}{dQ(t)/dt} = M_U(Q). \quad (7)$$

Отметим, что если зависимость  $U(t)$  от  $Q(t)$  можно выразить однозначной дифференцируемой функцией, то формулы (5) и (6) все равно не будут эквивалентными для порядков производной  $\alpha$  отличных от  $\alpha = 1$ . Данное свойство обусловлено нарушением стандартного правила дифференцирования сложной функции для нецелых порядков производной [18]. Это приводит к тому, что эредитарные предельные показатели, определяемые формулами (4) и (6), должны рассматриваться как независимые. Более того, в некоторых моделях можно предполагать, что степени угасания памяти для полезности некоторого блага  $U(t)$  и для количества потребленного блага  $Q(t)$  не совпадают. Для этого случая обозначим параметр угасания памяти об изменениях полезности блага символом  $\alpha$ , а для угасания памяти о количестве потребленного блага – символом  $\beta$ . Тогда эредитарная предельная полезность будет определяться формулой:

$$M_{U(t)}(Q(t), \alpha, \beta) = \frac{{}_0^C D_t^\alpha U(t)}{{}_0^C D_t^\beta Q(t)}. \quad (8)$$

Если  $\alpha=\beta$ , то формула (8) дает выражение (6).

Приведем пример вычисления эредитарной полезности (4). Для простоты воспользуемся тем же уравнением (3), описывающим зависимость  $U$  от  $Q$  с теми же параметрами ( $a_1 = 50$  и  $a_2 = 0,05$ ). Рассмотрим эредитарную предельную полезность для нецелого порядка  $\alpha \in (0; 1)$  и функции полезности (3). Используя линейность оператора производной Капуто нецелого порядка

$${}_0^C D_Q^\alpha U(Q) = a_1 \cdot {}_0^C D_Q^\alpha Q - a_2 \cdot {}_0^C D_Q^\alpha Q^3 \quad (9)$$

и формулы

$${}_0^C D_Q^\alpha Q^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} Q^{\beta-\alpha} \quad (n-1 < \alpha < n, \beta > n-1), \quad (10)$$

$${}_0^C D_Q^\alpha Q^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (11)$$

получаем для (4) при  $0 < \alpha < 1$  выражение

$$M_{U(t)}(Q(t), \alpha) = {}_0^C D_Q^\alpha U(Q) = a_1 \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot Q^{1-\alpha} - a_2 \cdot \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} \cdot Q^{3-\alpha}, \quad (12)$$

описывающее эредитарную предельную полезность  $M_{U(t)}(Q(t), \alpha)$ . Приведем в таблице величины предельных показателей, вычисленных по формуле (12) для различных значений параметра затухания памяти.

$\alpha$	1,00	0,99	0,90	0,84	0,70	0,60	0,50	0,40	0,10
$M_U(10, \alpha)$	35,00	36,25	48,98	59,11	88,85	116,27	149,87	239,74	367,98

Из таблицы видно, что предельная полезность может существенно зависеть от наличия эффекта памяти у экономического субъекта. Учет памяти у экономических субъектов представляется важным условием адекватности предлагаемых моделей, описывающих экономическое поведение индивидуумов. В качестве эффективного математического инструмента для описания экономических процессов с памятью можно использовать теорию производных и интегралов нецелого порядка.

*Список литературы*

1. **Летников А. В.** Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем [Электронный ресурс] // Математический сборник. 1868. Т. 3. № 2. С. 85-112. URL: <http://mi.mathnet.ru/msb8048> (дата обращения: 01.07.2016).
2. **Менгер К.** Избранные работы [Электронный ресурс]. М.: Издательский дом «Территория будущего», 2005. 496 с. URL: <http://www.prognosis.ru/lib/Menger%20RRR.pdf> (дата обращения: 01.07.2016).
3. **Самко С. Г., Килбас А. А., Марьчев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
4. **Тарасова В. В., Тарасов В. Е.** О применимости точечной эластичности спроса по цене для биржевых торгов по доллару США // Научная перспектива. 2016. № 6. С. 6-11.
5. **Тарасова В. В., Тарасов В. Е.** Ценовая эластичность спроса с памятью // Экономика, социология и право. 2016. № 4-1. С. 98-106.
6. **Тарасова В. В., Тарасов В. Е.** Экономические индикаторы: неоднозначность и эффекты памяти // Экономика. Управление. Право. 2016. № 3 (66).
7. **Тарасова В. В., Тарасов В. Е.** Эластичность внебиржевого кассового оборота валютного рынка РФ // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 7-1. С. 207-215.
8. **Учайкин В. В.** Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
9. **Debnath L.** A Brief Historical Introduction to Fractional Calculus // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2004. Vol. 35. № 4. P. 487-501.
10. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
11. **Laskin N.** Fractional Market Dynamics // Physica A. 2000. Vol. 287. № 3. P. 482-492.
12. **Mainardi F., Raberto M., Gorenflo R., Scalas E.** Fractional Calculus and Continuous-Time Finance II: The Waiting-Time Distribution // Physica A. 2000. Vol. 287. № 3-4. P. 468-481.
13. **Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F.** Fractional Calculus and Continuous-Time Finance // Physica A. 2000. Vol. 284. № 1-4. P. 376-384.
14. **Skovranek T., Podlubny I., Petras I.** Modeling of the National Economies in State-Space: A Fractional Calculus Approach // Economic Modelling. 2012. Vol. 29. № 4. P. 1322-1327.
15. **Tarasov V. E.** Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. N. Y.: Springer, 2011. 505 p.
16. **Tarasov V. E.** Leibniz Rule and Fractional Derivatives of Power Functions // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 11. № 3. Article ID 031014. 4 p.
17. **Tarasov V. E.** No Violation of the Leibniz Rule. No Fractional Derivative // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013. Vol. 18. № 11. P. 2945-2948.
18. **Tarasov V. E.** On Chain Rule for Fractional Derivatives // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 30. № 1-3. P. 1-4.
19. **Tarasova V. V., Tarasov V. E.** Elasticity for Economic Processes with Memory: Fractional Differential Calculus Approach // Fractional Differential Calculus. 2016. Vol. 6. № 2. P. 219-232.
20. **Tenreiro Machado J. A., Galhano A. M. S. F., Trujillo J. J.** On Development of Fractional Calculus during the Last Fifty Years // Scientometrics. 2014. Vol. 98. № 1. P. 577-582.
21. **Tenreiro Machado J. A., Mata M. E.** A Fractional Perspective to the Bond Graph Modelling of World Economies // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 80. № 4. P. 1839-1852.

**MARGINAL UTILITY FOR ECONOMICAL PROCESSES WITH MEMORY**

**Tarasova Valentina Vasil'evna**

**Tarasov Vasily Evgen'evich**, Doctor in Physical-Mathematical Sciences

*Lomonosov Moscow State University*

*v.v.tarasova@mail.ru; v.e.tarasov@bk.ru*

The article examines the conception of marginal utility and the methods to describe economical processes considering the dependence of the subject's current state not only on infinitesimally close previous states (i.e. integer order derivatives) but also on all the previous states on a finite interval. The paper justifies the necessity to consider economical subjects' memory in the models of consumer economical behaviour. To generalize the conception of marginal utility, which allows describing the behaviour of economical subjects with memory the authors use non-integer order derivatives.

*Key words and phrases:* economical subject; marginal utility; economical behaviour; heredity; effect of memory.