

Антонов Владимир Александрович

### **ВЫРАЖЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Изложены теоретические положения, методические приемы и рекомендации, направленные на выявление в экспериментальных научных исследованиях закономерностей, по которым устанавливаются и развиваются естественно-природные и социально-экономические процессы. Показано, что наиболее достоверно они выражаются и интерпретируются методом нелинейной функционально-факторной регрессии, сочетающей их детерминизм и статистическую случайность. Приведены два примера выявления закономерности.

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2016/8/1.html](http://www.gramota.net/materials/1/2016/8/1.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

### **Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2016. № 8 (110). С. 10-14. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2016/8/](http://www.gramota.net/materials/1/2016/8/)

### **© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

УДК 519.237.5

**Физико-математические науки**

*Изложены теоретические положения, методические приемы и рекомендации, направленные на выявление в экспериментальных научных исследованиях закономерностей, по которым устанавливаются и развиваются естественно-природные и социально-экономические процессы. Показано, что наиболее достоверно они выражаются и интерпретируются методом нелинейной функционально-факторной регрессии, сочетающей их детерминизм и статистическую случайность. Приведены два примера выявления закономерности.*

*Ключевые слова и фразы:* природные процессы и явления; экспериментальные измерения; случайные отклонения; нелинейная регрессия; закономерность; коэффициент детерминации.

**Антонов Владимир Александрович**, д.т.н.

*Институт горного дела Уральского отделения Российской академии наук  
antonov@igduran.ru*

**ВЫРАЖЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Закономерности равенства, искомые в экспериментальных исследованиях природных или социально-экономических явлений, как необходимые, существенные и регулярно повторяющиеся их связи определяются по результатам наблюдений и измерений соответствующих физических величин, параметров и показателей. Суждения о закономерностях могут обладать разной полнотой и информативностью сведений, характеризующих явление. Однако их выражения должны быть корректно определенными и интерпретируемыми при его толковании. Поскольку результаты измерений в экспериментах в большей или меньшей мере рассеяны из-за неизбежной погрешности, то закономерности выражаются с достаточной полнотой и определенностью лишь математическими методами, включающими синтез детерминизма и статистической случайности. Таким образом, ведущая форма выражения закономерности состоит в математическом описании и интерпретации причинных связей в последовательности, регулярности и повторяемости изучаемых явлений с достаточно высокой вероятностью в некотором доверительном интервале, обусловленном статистической случайностью.

Погрешность эксперимента, на фоне которой определяется закономерность данного явления, состоит из случайных отклонений, возникающих в связи с неточностью средств измерений (приборов, методов), а также наложением других менее значимых явлений, следующих в структурной иерархии. В связи с этим в исследуемых природных объектах или процессах выделяют структурные уровни, значимые и незначимые по отношению к искомой закономерности. Явления значимого уровня отображаются в детерминированной части закономерности с достаточной пространственной, временной или иной топологической определенностью. Явления, наблюдаемые на незначимых уровнях, относятся к погрешности. Представим среднеквадратичную погрешность эксперимента  $\sigma_s$  суммой

$$\sigma_s^2 = \sigma_n^2 + \sigma_y^2,$$

где  $\sigma_n$  – среднеквадратичная погрешность средства или метода измерения;  $\sigma_y$  – среднеквадратичная погрешность, возникающая из-за влияния случайного незначимого явления. Методология оценки среднеквадратичной погрешности эксперимента изложена в работе [1]. Здесь следует добавить, что дисперсия  $\sigma_y^2$  рассчитывается как среднее из дисперсий внутри групп, образованных измерениями в узких интервалах, намного меньших, чем размер значимого уровня. При повторных измерениях физических величин, характеризующих исследуемое явление, незначимые уровни могут воспроизводиться с погрешностью  $\sigma_n$ , но при повторной реализации этого явления они случайно перераспределяются с погрешностью  $\sigma_y$ . Разделение значимых и незначимых структурных неоднородностей объектов и процессов, отображаемых в детерминированной и случайной составляющих закономерности, весьма относительное. Оно требует причинной интерпретации результатов экспериментальных измерений с учетом структурных особенностей наблюдаемого явления и цели научного исследования. Например, цель геоинформационного исследования заключается в оценке региональной закономерности изменения геологического признака по его проявлениям в совокупности крупных литологических структур. Положим, что характер этих изменений обусловлен действием не случайного природного фактора и подлжит детерминации. Тогда вариации признака на уровне более мелких (незначимых) геологических структур относятся к случайным явлениям, т.е. к погрешности. Таким образом, приходим к выводу об относительном толковании закономерности, исходя из цели ее поиска и соответствующей оценки значимости факторов данного явления.

Закономерность изменения зависимой величины  $Y$  выражается уравнением, состоящим из функций, усредняющих результаты ее экспериментальных измерений в узких интервалах. При этом имеется в виду, что распространение функций в областях интерполяции и экстраполяции будет так же достоверно отображать характерные черты и особенности исследуемого природного, техногенного или социально-экономического явления, как в точках экспериментальных измерений. Такими свойствами обладает нелинейная функционально-факторная регрессия [3], положения которой сформулированы и развиты в Институте горного дела УрО РАН. Отличительная особенность ее формирования и распространения состоит в учете причин явления как факторов,

действие которых выражается математическими функциями. Поэтому полученные уравнения регрессии становятся интерпретируемыми и пригодными для объяснения связей явления.

Перед построением регрессии определяются требования к ее детерминации. В них учитывается, что выявить закономерность изменения зависимой величины  $Y$  можно лишь с той погрешностью, которая соответствует случайной составляющей в результатах экспериментальных измерений. Для этого необходимо, чтобы коэффициент детерминации  $R^2$  искомого уравнения регрессии с выбранной вероятностью  $P$  находился в интервале, ограниченном нижним  $R^2_{\text{н}}$  и верхним  $R^2_{\text{в}}$  значениями. Они рассчитываются по формулам

$$R^2_{\text{н}} = 1 - \frac{f \cdot \sigma_y^2}{\chi^2_{\alpha_1, f} \cdot D_y} \quad \text{и} \quad R^2_{\text{в}} = 1 - \frac{f \cdot \sigma_y^2}{\chi^2_{\alpha_2, f} \cdot D_y},$$

где  $f$  – число степеней свободы в расчете экспериментального среднееквдратичного отклонения  $\sigma_y$ ;  $\chi^2_{\alpha_1, f}$  и  $\chi^2_{\alpha_2, f}$  – процентные точки распределения Пирсона на соответствующих уровнях значимости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 = (1+P)/2$ ,  $\alpha_2 = (1-P)/2$ );  $D_y$  – дисперсия экспериментальных значений зависимой величины  $Y$ .

Общий вид регрессии формируется по принципу факторного влияния. Оно учитывается в двух направлениях. В одном из них принимают известные в обобщенном виде теоретические представления о процессах, объясняющих исследуемое явление. Тогда влияние его факторов выражается в уравнении регрессии математическими функциями разной сложности в соответствии с принятой теорией. В другом направлении, когда теория не развита или отсутствует, руководствуются характерными особенностями, т.е. феноменами распределения результатов измерений, обнаруженными в экспериментах. Действие факторов явления выражается в регрессии набором функций, описывающих особенности наблюдаемых изменений зависимой величины, в т.ч. монотонности ее роста и спада на отдельных участках аргументов. Теперь задача регрессии сводится к численному определению множества функциональных параметров и последующей интерпретации их значимости в объяснении рассматриваемого явления.

Функциональные параметры рассчитываются в процессе оптимизации уравнения регрессии. Коэффициент его детерминации согласно критерию оптимизации должен достигать значений, находящихся в интервале от  $R^2_{\text{н}}$  до  $R^2_{\text{в}}$ . Применение здесь метода наименьших квадратов (МНК) недостаточно, а дополнительное использование других численных методов (прямого поиска, градиентных, второго порядка) затруднено или вовсе невозможно из-за часто получаемой сложной топологии целевой функции  $R^2$  и, как следствие, неустойчивой сходимости алгоритмов итерационных расчетов. В исследованиях [2], проведенных в ИГД УрО РАН, показано, что дополнительная оптимизация сложных и многомерных уравнений нелинейной функционально-факторной регрессии эффективно проводится методом приближений параболической вершины (МППВ). Алгоритм расчета этим методом обеспечивает устойчивое определение оптимальных значений показателей степени, коэффициентов, смещений координат, длин релаксации и других функциональных параметров с заданной погрешностью. В результате оптимизации устанавливается совокупность параметров, при которой коэффициент детерминации  $R^2$  входит в интервал  $[R^2_{\text{н}}, R^2_{\text{в}}]$  как наибольший из всех возможных, оцениваемых МНК. Следует отметить, что при наличии погрешности  $\sigma_y$  не требуется устремлять коэффициент детерминации к единице, а линия или поверхность регрессии не должны везде совпадать с экспериментальными значениями зависимой величины  $Y$ .

Последовательность этапов исследований, направленных на выявление закономерности наблюдаемого явления, показана на Рис. 1. Анализ его структурных неоднородностей предшествует расчету границ допустимого коэффициента детерминации в выражении искомого закономерности. Далее, по теоретическим представлениям и экспериментальным наблюдениям явления формируется общий вид уравнения регрессии  $Y_p$  зависимой величины. Его коэффициенты и функциональные параметры оптимизируются методами МНК и МППВ. Уравнение регрессии  $Y_p$ , полученное по итогам оптимизации в конкретном виде, проверяется на адекватность отображения закономерности. Адекватным, т.е. выражающим закономерность явления с вероятностью  $P$ , признается уравнение, коэффициент детерминации которого находится в допустимом интервале  $[R^2_{\text{н}}; R^2_{\text{в}}]$ . Проверяется также наличие статистических свойств нормального и гомоскедастичного распределения случайных отклонений результатов экспериментальных измерений от регрессии. Эти свойства необходимы для вероятностной оценки погрешности, с которой выявляется закономерность. Убедиться в их выполнении можно, например, по результатам графического анализа указанных отклонений. Тогда средняя квадратичная погрешность  $\sigma_p$  адекватной регрессии, т.е. закономерности, объясняется погрешностью экспериментальных измерений  $\sigma_y$ . При этом закономерность явления, характеризуемого изменением величины  $Y$ , обнаруживается, например, с вероятностью 0,95 в интервале  $Y_p \pm 2\sigma_p$ .

Интерпретация полученной закономерности проводится с учетом ее математического выражения. Имеется в виду толкование значимости отдельных членов уравнения регрессии и их функциональных параметров в описании характерных особенностей и связей природного или социально-экономического явления. По математическому выражению закономерности могут оцениваться формы и размеры исследуемых объектов, координаты минимума или максимума зависимой величины, положение ее изолиний, выбранных по какому-либо критерию. Определяются также интервалы релаксации или показатели степени, количественно выражающие крутизну роста или спада зависимой величины на отдельных стадиях явления. Таким образом, описание названных явлений по установленным закономерностям дает целостное представление об их формах, связях, становлении и развитии, что весьма важно для прогнозирования и планирования, а также принятия управляющих решений.



Рис. 1. Этапы выявления закономерности

Приведем два примера выявления закономерности.

*Пример 1.* В геодинамических исследованиях [5] ставилась цель – получить зависимость горизонтальной относительной деформации  $u$  массива ультраосновных горных пород, слагающих стенки вертикальных стволов на шахтах Донского горно-обогатительного комбината, от так же относительного (в долях диаметра ствола) расстояния  $h$  до забоя. Массив горных пород рассматривается как однородная сплошная среда, обладающая пластично-упругими свойствами. В связи с углублением шахты измерения деформации проводились на разных горизонтах и точках периметров стволов, где условия сплошности горных пород частично нарушались. Результаты измерений, проведенных на одинаковых расстояниях  $h$ , усреднены. Их распределение, показанное на Рис. 2, отображает характер изменения деформации стенок шахты, происходящей из-за пластично-упругих свойств окружающего горного массива, являющихся значимыми для обнаружения зависимости  $u(h)$ . Полученные при этом случайные среднеквадратичные отклонения  $\sigma_y=0,0018$  объясняются погрешностью метода измерений и разнонаправленным действием незначимых факторов, нарушающих однородность горных пород. К ним относятся подвижки консолидированных блоков горных пород, влияние их анизотропной структуры, наличие локальных зон трещиноватости и обводнения. С учетом погрешности  $\sigma_y$  рассчитаны граничные значения  $R^2_n=0,8925$  и  $R^2_v=0,9364$  допустимого интервала коэффициента детерминации искомой закономерности.

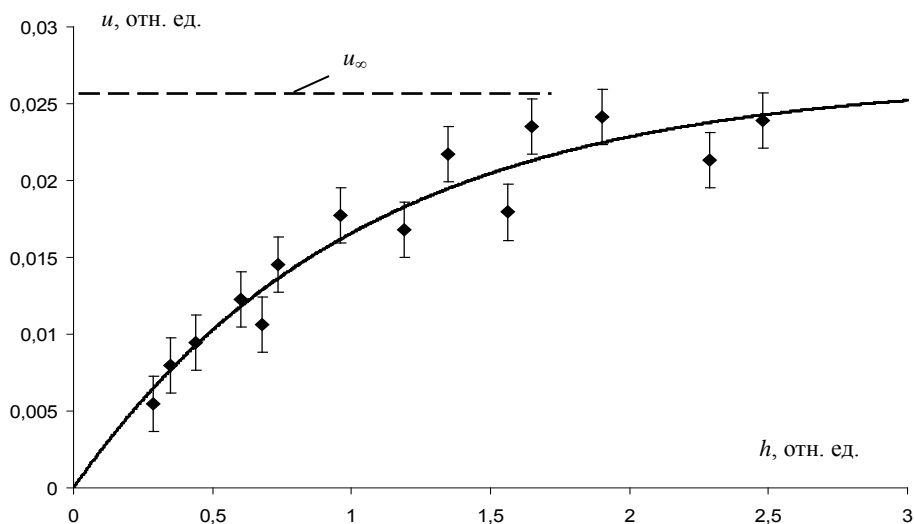


Рис. 2. Распределение измерений относительной деформации горного массива и график ее функционально-факторной регрессии

Общий вид уравнения регрессии, сформированного по теоретическим представлениям о влиянии на деформацию пластично-упругих свойств горных пород, следующий:

$$u_{po} = u_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{h}{\lambda}}\right),$$

где  $\lambda$  – относительная длина вертикальной релаксации упругого напряжения;  $u_\infty$  – относительная деформация горной породы, сбалансированная в удалении от забоя ( $h \gg \lambda$ ) противоположно направленными действиями факторов пластичности и упругости. После расчета оптимальных параметров программой «Тренды ФСП-1» данное уравнение представляется в форме

$$u_p = 0,0267(1 - e^{-\frac{h}{1,0272}}).$$

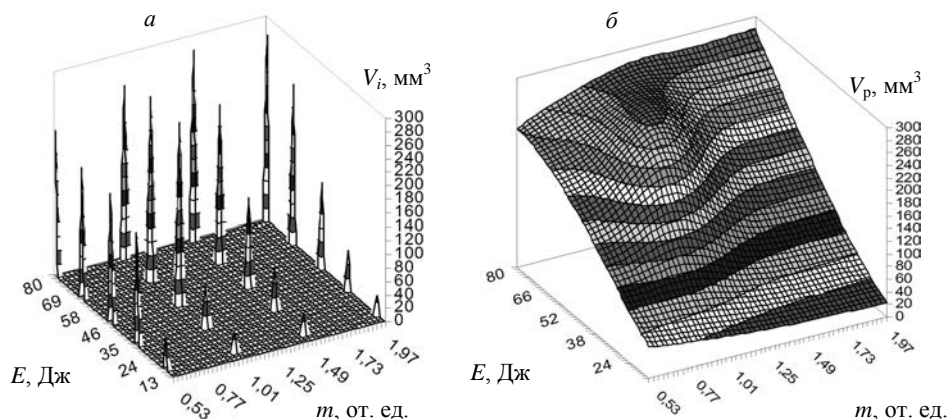
График регрессии показан на Рис. 2. Коэффициент ее детерминации  $R^2=0,924$  удовлетворяет заданному интервалу адекватности. Распределение случайных отклонений регрессии от экспериментально измеренной деформации близко к нормальному и обладает свойством гомоскедастичности. Среднее квадратичное отклонение регрессии от экспериментально измеренной деформации  $\sigma_p=0,0017$  почти совпадает с приведенной выше оценкой  $\sigma_3$ . Следовательно, данным уравнением выражена искомая закономерность изменения горизонтальной относительной деформации горных пород. В реальном масштабе, с учетом диаметра ствола шахты 8,5 м, закономерность изменения деформации  $U$  его стенок проявляется с вероятностью 0,95 в интервале

$$U_p(H) = 0,22(1 - e^{-\frac{H}{8,73}}) \mp 0,029,$$

где  $H$  – расстояние до забоя ствола.

Интерпретируя детерминированную часть полученной закономерности, приходим к следующим объяснениям характерных особенностей горизонтальной деформации горных пород, окружающих ствол шахты. Деформация рассматривается как радиальное смещение стенки ствола, происходящее на расстоянии  $H$  от забоя, от положения стенки на уровне забоя, где приняты начала координат  $H=0$ ,  $U_p=0$ . Крутизна нарастания деформации  $U_p$  от нуля до сбалансированного значения 0,22 м характеризуется длиной релаксации 8,73 м, приблизительно равной диаметру ствола. Вблизи забоя ствола, при условии  $H \ll 8,73$  м, деформация обусловлена преимущественным влиянием пластических свойств горных пород. Под их действием происходит приблизительно пропорциональное смещение стенки ствола в направлении его центра согласно соотношению  $U_p \approx 0,025 \cdot H$ . По мере удаления от забоя, т.е. увеличения  $H$ , нарастает противодействие смещению за счет развития упругой сдвиговой деформации горного массива. Поэтому зависимость  $U_p(H)$  переходит от линейной стадии к вогнутости и далее к асимптотическому сбалансированному состоянию  $U_\infty=0,22 \pm 0,029$  м. Уже на отметке трех длин релаксации ( $H=25,2$  м) отношение  $U_p(H)/U_\infty$  составляет 0,95. С учетом выявленной закономерности даны рекомендации по принятию технологических решений в укреплении стен ствола шахты, упреждающих негативные последствия деформации горных пород.

*Пример 2.* По данным экспериментального разрушения образца горной породы, происходящего вблизи его края при ударах индентора бурового инструмента, определена закономерность в изменении объема  $V$  разрушений [4]. Удары производились при разной механической энергии  $E_i$  индентора в точках, расположенных так же на разном относительном расстоянии  $m_i$  от края, где  $m_i = L_i/d$ ;  $L_i$  – расстояние до края;  $d$  – диаметр индентора. Погрешность эксперимента  $\sigma_3=28,4$  мм<sup>3</sup> объясняется погрешностью метода измерения разрушенного объема  $V_i$ . Его распределение в координатах  $E$ ,  $m$  показано на Рис. 3а. С учетом количества измерений и погрешности  $\sigma$ , рассчитаем с доверительной вероятностью 0,95 нижнюю и верхнюю границу допустимого интервала коэффициента детерминации искомой модели, соответственно, 0,885 и 0,943.



**Рис. 3.** Распределение объема разрушенной горной породы в точках экспериментальных измерений (а) и в регрессионной модели (б)

Общий вид регрессии объема  $V$  сформируем с учетом влияющих факторов, исходя из теоретических представлений о разрушении горной породы и его характерных особенностей, наблюдаемых в эксперименте. Отметим здесь влияние на распределение объема  $V_i$  факторов, широко распространенных и локализованного в некоторой области. Действие распространенных факторов обусловлено вертикальной нагрузкой удара, приводящей к разрушениям в лунке под индентором. Среди них выделим факторы монотонного

изменения данного объема. Имеются две монотонности, направленные вдоль оси относительного расстояния  $m$  и вдоль оси энергии удара  $E$ . Еще две монотонности направлены по диагонали, т.е. под углом к этим осям. Действие факторов, изгибающих регрессионную поверхность объема  $V_p$  по упомянутым монотонностям, выразим суммой соответствующих степенных функций: осевых  $A_1 m^{\mu_1}$ ,  $A_2 E^{\mu_2}$  и диагональных  $A_3 m^{\mu_3} E^{\mu_4}$ ,  $A_4 m^{\mu_5} E^{\mu_6}$ . Действие локализованного фактора обусловлено боковым напряжением, вызывающим в узком интервале аргументов возрастающий и убывающий по объему скол горной породы, находящейся между лункой и краем образца. Его действие выразим следующей двумерной функцией гауссовой формы, смещенной по осям координат и углу поворота:

$$A_5 e^{-\frac{[(m-m_0)\cos\phi + (E-E_0)\sin\phi]^2}{\lambda^2} - \frac{[(m-m_0)\sin\phi - (E-E_0)\cos\phi]^2}{\theta^2}}.$$

Здесь угол  $\phi$ , энергии  $E$ ,  $E_0$ ,  $\theta$  и расстояния  $m$ ,  $m_0$ ,  $\lambda$  выражены в относительном виде. Суммируя отмеченные функции, получим общий вид регрессии  $V_p$ .

Модель регрессии оптимизируем МППВ по методике М5Т-3, М11Т-1. В трех сечениях М5Т определяются шесть показателей от  $\mu_1$  до  $\mu_6$  в соответствующих степенных функциях. В сечении М11Т-1 проводится расчет еще пяти параметров  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $d_0$ ,  $E_0$ , содержащихся в функции гауссовой формы. В итоге оптимизации получаем уравнение регрессии  $V_p$  в следующем конкретном виде:

$$V_p = 11,076 m^{-1,0125} + 0,1152 E^{1,803} + 3,1504 \times m^{-0,6564} E^{0,572} - 3,414 \times 10^{-5} m^{-0,789} E^{3,4058} +$$

$$+ 98,98 e^{-\frac{[(m-1,057)\cos 0,005 - (E-50,2)\sin 0,005]^2}{0,315^2} - \frac{[(m-1,057)\sin 0,005 + (E-50,2)\cos 0,005]^2}{20,8^2}}$$

Распределение отклонений  $V_p$  от экспериментальных значений  $V_i$  близко к нормальному и обладает свойством гомоскедастичности. Графическое изображение данной регрессии представлено на Рис. 3б. Значение коэффициента ее детерминации 0,932 попадает в допустимый интервал. Средняя квадратичная погрешность регрессии  $\sigma_p = 25,5 \text{ мм}^3$  близка по значению к погрешности экспериментальных измерений  $\sigma$ , разрушенного объема горной породы. Это означает, что модель устойчива к воспроизводимости эксперимента и адекватно его погрешности отображает закономерность разрушения горной породы. По данной закономерности в области максимума  $V_p$  определяются оптимальные режимы удара  $m_0$  и  $E_0$ , при которых достигается наибольшее разрушение горной породы.

В заключение приходим к выводу, что при поиске экспериментальных закономерностей важно выделять и учитывать значимые и незначимые факторы наблюдаемого явления и структурный состав сопутствующих измерений в соответствии с задачей и целью его научного исследования. Выполнение данных рекомендаций, как показано на приведенных примерах, позволяет выявить и интерпретировать закономерности обоснованно и достоверно, что существенно повышает их научную и практическую значимость.

#### Список литературы

1. Антонов В. А. Оценка адекватности регрессионной модели по погрешности экспериментальных измерений // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2014. № 11 (89). С. 27-32.
2. Антонов В. А. Построение и оптимизация моделей нелинейной функционально-факторной регрессии // Информационные технологии. 2013. № 5. С. 17-24.
3. Антонов В. А., Яковлев М. В. Отображение горно-технологических закономерностей функционально-факторными уравнениями нелинейной регрессии // Проблемы недропользования: горный информационно-аналитический бюллетень. 2011. Отдельный выпуск. С. 571-588.
4. Реготунов А. С., Антонов В. А. Экспериментальное исследование режимов ударного бурения горных пород // Известия вузов. Горный журнал. 2015. № 8. С. 61-69.
5. Харисов Т. Ф., Антонов В. А. Исследование деформации горных пород в процессе проходки вертикального ствола // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2015. № 3. С. 146-150.

#### REGULARITIES EXPRESSION IN EXPERIMENTAL STUDIES

Antonov Vladimir Aleksandrovich, Doctor in Technical Sciences  
Institute of Mining of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences  
antonov@igduran.ru

The article deals with theoretical principles, methodological techniques and recommendations aimed at revealing regularities in experimental scientific studies, according to which natural and socio-economic processes are established and developed. It is shown that they are expressed and interpreted in the most reliable way by the method of nonlinear functional-factor regression combining their determinism and statistical randomness. Two examples of revealing regularity are given.

*Key words and phrases:* natural processes and phenomena; experimental measurements; random deviates; nonlinear regression; regularity; coefficient of determination.